Редуктивные группы над кольцами

Алексей Степанов

7 февраля 2017 г.

Содержание курса

G – редуктивная групповая схема над кольцом K, удовлетворяющая условиям, сформулированным ниже (достаточно изотропная, односвязная).
В частности, условия выполнены для односвязной групповой схемы Шевалле–Демазюра $G = \mathrm{G}(\Phi, \_\,)$, $\Phi \neq A_1$ (в этом случае $K = \mathbb{Z}$). Условие односвязности нужно не для всех результатов, но для простоты будем всегда его предполагать.
Для начинающих достаточно иметь ввиду случай $G = SL_n$, $n \geqslant 3$.
Что доказываем?

1. Нормальность элементарной подгруппы и коммутационные формулы.
2. Ограниченность длин коммутаторов.
3. Нильпотентную структуру $G(R)/E(R)$.
4. Стандартность нормального строения.

Билиография I

- Степанов А.В., *Новый взгляд на разложение унипотентов и нормальное строение групп Шевалле*, Алгебра и анализ **28** (2016), no. 3, 161–173.
- А. В. Степанов, *Структурная теория и подгруппы групп шевалле над кольцами*, Докторская диссертация, Санкт-Петребург, 2014.
- M. Demazure and P Gabriel, *Introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, Math. Stud. **39**, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups, 2nd ed.*, Mathematical surveys and monographs, vol. 107, AMS, 2003.
- A. Stepanov, *Elementary calculus in Chevalley groups over rings*, J. Prime Research in Math. **9** (2013), 79–95.

Билиография II

A. V. Stepanov, *Structure of Chevalley groups over rings via universal localization*, J. Algebra **450** (2016), 522–548.

Все работы автора можно найти на сайте
`http://alexei.stepanov.spb.ru/publ-ru.html`

Аффинные групповые схемы

Пусть A – K-алгебра. $\operatorname{Sp}_K A(R) := \operatorname{Hom}_{K\text{-}alg}(A, R)$ – аффинная схема.
$G : K\text{-}alg \to Groups$ – функтор, композиция которого с забывающим – аффинная схема. $A = K[G]$ – аффинная алгебра схемы G – алгебра Хопфа.
Обозначим $g = \mathrm{id}_A \in G(A)$ – общий элемент схемы G. Если $a \in G(R)$, т.е. $a : A \to R$, то $G(a)(g) = a$. Вместо $G(a)$ пишем a.
Единичный элемент группы $G(K)$ – это гомоморфизм $e_K : A \to K$ – коединица. Ядро коединицы – фундаментальный идеал $I = \operatorname{Ker} e_K$. Заметим, что композиция $K \to A \xrightarrow{e_K} K$ тождественна, поэтому $K[G] = K \oplus I$ (как K-модули).
Пусть J – идеал в R. $G(R, J) = \operatorname{Ker}\big(G(R) \to G(R/J)\big)$.

Лемма

$a \in G(R, J) \iff a(I) \subseteq J$.

Замкнутые и открытые подсхемы

Пусть $\mathfrak{q}$ – идеал в A. Замкнутая подсхема в $\mathrm{Sp_K A}$:

$$V(\mathfrak{q})(R) := \{a : A \to R \mid a(\mathfrak{q}) = 0\}.$$

$$V(\mathfrak{q}) \cong \mathrm{Sp}_K\, A/\mathfrak{q}.$$

Открытая подсхема в $\mathrm{Sp_K A}$ (не обязательно аффинная):

$$D(\mathfrak{q})(R) := \{a : A \to R \mid a(\mathfrak{q})R = R\}.$$

Главная открытая подсхема в $\mathrm{Sp_K A}$ – это открытая подсхема, соответствующая главному идеалу: $D(sA) \cong \mathrm{Sp}_K\, A_s$, где $s \in A$. Пусть $s_1, \ldots, s_k \in A$ – унимодулярный набор, т.е. $\sum s_i A = A$. Тогда набор $D(s_i A)$ называется открытым покрытием $\mathrm{Sp}_K\, A$ главными открытыми множествами.

Элементарная подгруппа

Для группы Шевалле $G(R) = \mathrm{G}(\Phi, R)$.
Положим $E(\mathfrak{a}) = \langle x_\alpha(r) \mid \alpha \in \Phi,\ r \in \mathfrak{a}\rangle$, где R – кольцо, $\mathfrak{a}$ – идеал в R. При $\mathfrak{a} = R$ получим элементарную подгруппу $E(R)$.
Тогда E – функтор из колец в группы (E не является схемой).
$E(R, \mathfrak{a}) = E(\mathfrak{a})^{E(R)}$ (нормальное замыкание) – относительная элементарная подгруппа.
Формально $E(R, \mathfrak{a})$ определяет групповой подфунктор в $G(R, \mathfrak{a})$, из категории K-алгебра$+$идеал в категорию групп, удовлетворяющий свойствам, выписанным ниже. Чтобы отличать эти 2 функтора, от функторов $E, G : K\text{-}alg \to Groups$, будем обозначать их $\check{E}$ и $\check{G}$.

Базовые факты (аксиомы) 1

Свойство (нормальность)

$E(R, \mathfrak{q}) \triangleleft E(R)$.

Свойство (сюръективность)

Функтор $\check{E}$ сохраняет сюрьективные отображения.

Свойство (порождение)

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы в R. Тогда

$$E(R, \mathfrak{a})E(R, \mathfrak{b}) = E(R, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Если R' – подалгебра в R такая, что $R = R' + \mathfrak{a}$, то

$$E(R')E(R, \mathfrak{a}) = E(R).$$

Лемма (Принцип расщепления)

Если композиция $R' \rightarrowtail R \xrightarrow{\varphi} R'$ тождественна, а $\mathfrak{q} = \operatorname{Ker} \varphi$, то $G(R, \mathfrak{q}) \cap E(R) = E(R, \mathfrak{q})$.

Аксиомы 2: разложение Гаусса

Свойство (Разложение Гаусса)

Существует покрытие схемы G главными открытыми подсхемами $\mathcal{G}_i = \mathrm{Sp}_K A_{s_i}$, где $i = 1, \ldots, \ell$, содержащимися в E, причем $s_i - \delta_{1i} \in I$.

Следствие

Если $\mathfrak{q}$ содержится в радикале Джекобсона кольца R, то $G(R, \mathfrak{q}) \leqslant E(R)$.
Если R локальное кольцо, то $G(R) = E(R)$.

Заметим, что условие $\mathrm{Sp}_K A_{s_i} \leqslant E$ равносильно условию $\lambda_{s_i}(g) \in E(A_{s_i})$.

Свойство (существование представления)

Существует точное представление $\pi : G \to \mathrm{GL}_n$.

Аксиомы 3: избавление от знаменателей

Свойство (стандартное избавление от знаменателей)

Пусть S – мультипликативное подмножество в R, а $a \in G(R[t], tR[t])$. Предположим, что $\lambda_S(a) \in E(R_S[t])$. Тогда существует $s \in S$ такое, что $a(st) \in E(R[t], tR[t])$.

В классике этот принцип работает, потому что кольцо многочленов – это аффинная алгебра корневой подгруппы $X_\alpha \cong \mathbb{G}_a$. У нас нет никаких корневых подгрупп, поэтому необходимо усилить этот принцип.

Свойство (избавление от знаменателей)

Пусть R – кольцо, S – мультипликативное подмножество в R, $t \in R$ и $a \in G(R, tR)$. Предположим, что $\lambda_S(a) \in E(R_S, tR_S)$. Тогда существует $s \in S$ такой, что $\rho_r(a) \in E\big(R/(t - sr)R\big)$ для любого $r \in R$, где $\rho_r : R \to R/(t - sr)R$ – гомоморфизм редукции по модулю $t - sr$.

Нормальность элементарной подгруппы

Лемма (Нормальность элементарной подгруппы)

$[G(R,\mathfrak{q}),E(R)] \leqslant E(R,\mathfrak{q})$, *в частности* $E(R) \trianglelefteq G(R)$.

Расширенная элементарная группа

Пусть ℓ – количество главных открытых подсхем, которыми покрывается G по свойству "разложение Гаусса".

Определение (расширенная элементарная группа)

$$\widetilde{E}(R,\mathfrak{q}) = \bigcap_{(r_1,\dots,r_\ell)\in \mathrm{Um}_\ell(R)} \prod_{i=1}^{\ell} G(R, r_i\mathfrak{q}).$$

Лемма

$E(R,\mathfrak{q}) \leqslant \widetilde{E}(R,\mathfrak{q})$.

Доказательство.

$$E(R,\mathfrak{q}) = \prod_{i=1}^{\ell} E(R, r_i\mathfrak{q}) \leqslant \prod_{i=1}^{\ell} G(R, r_i\mathfrak{q}).$$

□

Ключевая конструкция

Лемма

Существует кольцо $D = D_G$ и элементы $t \in D$ и $f \in G(D, tD)$, удовлетворяющие следующему версальному свойству. Для любого кольца R и элементов $r \in R$ и $h \in G(R, rR)$ существует гомоморфизм $\theta : D \to R$ такой, что $\theta(t) = r$ и $\theta(f) = h$.

Конструкция.

$$\begin{array}{ccc} K[z_{ij}] = K[M_n] & \xrightarrow{\varphi} & K[t, y_{ij}] \\ {\scriptstyle \pi^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle \xi}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

где $\varphi(z) = e + ty$, т. е. $\varphi(z_{ij}) = \delta_{ij} + ty_{ij}$. □

Будем обозначать через t и y_{ij} их канонические образы в D. Пусть Y – идеал в D, порожденный всеми y_{ij}.

Версальный элемент для $\widetilde{E}$

Пусть $D^{(k)}$ обозначает кольцо изоморфное D, порожденное элементами $t^{(k)}$ и $y_{ij}^{(k)}$ вместо t и y_{ij} (где $1 \leqslant i, j \leqslant n$).
Аналогично будем писать $f^{(k)} \in G(D^{(k)})$ вместо $f \in G(D)$.
Положим

$$U = \bigotimes_{k=1}^{\ell} D^{(k)} \text{ и } u = f^{(1)} \cdots f^{(\ell)} \in G(U).$$

Обозначим через $\widetilde{Y}$ идеал в U, порожденный всеми $y_{ij}^{(k)}$.

Лемма

Для любого кольца R, унимодулярной последовательности $r_1, \ldots, r_\ell \in R$ и элемента $b \in \widetilde{E}(R, \mathfrak{q})$ существует гомоморфизм $\eta : U \to R$ такой, что $\eta(u) = b$, $\eta(t^{(k)}) = r_k$ для всех $k = 1, \ldots, \ell$ и $\eta(\widetilde{Y}) \subseteq \mathfrak{q}$.

Лемма

Идеал Y является расщепляющим в D.
Идеал $\widetilde{Y}$ является расщепляющим в U.

Усиленные коммутационные формулы и длина коммутаторов

Пусть S подфунктор в $\check{E}$ такой, что $S(R,\mathfrak{q})$ порождает $E(R,\mathfrak{q})$ для любого кольца R и идеала $\mathfrak{q}$ в R. Тогда S называется функториальным порождающим множеством для $\check{E}$.

Теорема (усиленные коммутационные формулы)

$[G(R,\mathfrak{q}),\widetilde{E}(R)] \leqslant E(R,\mathfrak{q})$ и $[G(R),\widetilde{E}(R,\widetilde{q})] \leqslant E(R,\mathfrak{q})$. Более того, существует константа $L \in \mathbb{N}$, зависящая только от G, такая, что для любого кольца R, идеала $\mathfrak{q}$ в R, $a \in G(R)$ и $b \in \widetilde{E}(R,\mathfrak{q})$ (или $a \in G(R,\mathfrak{q})$ и $b \in \widetilde{E}(R)$) длина коммутатора $[a,b]$ относительно $\mathcal{S}(R,\mathfrak{q})$ не превосходит L.

Мультикоммутационные формулы

Теорема (мультикоммутационная формула)

Пусть $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ *– идеалы кольца* R. *Тогда*

$$[\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}_1), G(R, \mathfrak{a}_2), \ldots, G(R, \mathfrak{a}_m)] \leqslant$$
$$[\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{m-1}), G(R, \mathfrak{a}_m)] =: EE(R, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{a}_m).$$

В частности,

$$[\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}_1), G(R, \mathfrak{a}_2), \ldots, G(R)] \leqslant$$
$$[\widetilde{E}(R, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{m-1}), G(R)] \leqslant E(R, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{m-1}).$$

Теорема (обобщение нильпотентности K_1)

Если R *– нетерово кольцо, размерность пространства максимальных идеалов которого не превосходит* d, *то для любых идеалов* $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d$ *кольца* R

$$[G(R, \mathfrak{a}_0), G(R, \mathfrak{a}_1), \ldots, G(R, \mathfrak{a}_d)] \leqslant EE(R, \mathfrak{a}_0 \ldots \mathfrak{a}_{d-1}, \mathfrak{a}_d).$$

Нормальное строение

Приведем версию теоремы о нормальном строении групп Шевалле при условии обратимости структурных констант. Естественно, для доказательства этого результата уже не достаточно приведенных аксиом. Пусть $G = \mathrm{G}(\Phi, \_\,)$ – групповая схема Шевалле–Демазюра с приведенной неприводимой системой корней $\Phi \neq A_1$. Обозначим через $C(R, \mathfrak{q})$ прообраз центра при гомоморфизме редукции $R \to R/\mathfrak{q}$.

Теорема

Предположим, что 2 обратима в R, если $\Phi = B_n, C_n, F_4$, и 6 обратима в случае $\Phi = G_2$. Тогда для любой подгруппы $H \leqslant G(R)$, нормализуемой $E(R)$, существует единственный идеал $\mathfrak{q}$ кольца R такой, что

$$E(R, \mathfrak{q}) \leqslant H \leqslant C(R, \mathfrak{q}).$$

Доказательство теоремы о нормальном строении 1.

Для $\alpha \in \Phi$ положим $\mathfrak{q}_\alpha(H) = \{t \in R \mid x_\alpha(t) \in H\}$.

Лемма (вычисление уровня)

$\mathfrak{q}(H) := \mathfrak{q}_\alpha(H)$ не зависит от корня $\alpha \in \Phi$ и является идеалом в R.

Лемма (основная редукция)

Предположим, что любая нецентральная подгруппа в $G(\bar{R})$, нормализуемая $E(\bar{R})$ над любым факторкольцом $\bar{R}$ кольца R содержит нетривиальный корневой унипотентный элемент. Тогда нормальное строение группы $G(R)$ стандартно.

Лемма (извлечение унипотента из клетки Гаусса)

Если H содержит нецентральный элемент из клетки Гаусса (в частности, из $G(R, \operatorname{Rad} R)$) то она содержит нетривиальный корневой унипотентный элемент.

Доказательство теоремы о нормальном строении 2

Следствие (стандартность над полем)

Если R поле, то либо H содержится в центре, либо содержит $E(R)$.

Лемма (извлечение унипотента из общего элемента)

Пусть H_g – наименьшая подгруппа $G(A)$, нормализуемая $E(A)$ и содержащая общий элемент g схемы G, а $S = V\big(\mathfrak{q}(H_g)\big)$. Тогда $S(R) \not\supseteq E(R)$ для любого кольца R.

Доказательство теоремы о нормальном строении 3

Доказательство теоремы о нормальном строении.

Предположим, что H не содержит нетривиальных корневых унипотентов. Условие $h(S) \neq 0$ для какого-то $h \in H$ противоречит предположению.
Следовательно, $H \subseteq S(R)$. При редукции по любому максимальному идеалу $\overline{H} := \rho_{\mathfrak{m}}(H) \subseteq S(R/\mathfrak{m})$. Следовательно, $\overline{H} \not\supseteq E(R/\mathfrak{m})$. По следствию "стандартность над полем" $[\overline{H}, E(R/\mathfrak{m})] = \{e\}$.
Таким образом, $[H, E(R)] \leqslant G(R, \operatorname{Rad} R)$. По следствию "извлечение унипотента из клетки Гаусса" $[H, E(R)]$ лежит в центре.
Так как $E(R)$ совпадает со своим коммутантом, а ее централизатор совпадает с центром $G(R)$, то теория групп говорит, что H содержится в центре $G(R)$. $\square$