ОБРАЗУЮЩИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГРУППЫ

Алексей Степанов

Все кольца предполагаются коммутативными с 1. Пусть $G = \mathrm{G}(\Phi, \_)$ – групповая схема Шевалле–Демазюра с системой корней $\Phi \neq A_1$, а E – ее элементарная подгруппа. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R обозначим через $E(\mathfrak{a})$ подгруппу в $E(R)$, порожденную всеми элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(r)$, $\alpha \in \Phi$, $r \in \mathfrak{a}$, а через $E(R, \mathfrak{a})$ – нормальное замыкание $E(\mathfrak{a})$ в $E(R)$. В докладе пойдет речь об образующих группы $E(R, \mathfrak{a})$.

Положим $z_\alpha(r, s) = x_\alpha(r)^{x_{-\alpha}(s)}$. Для подмножества корней $\Sigma \subseteq \Phi$ обозначим через $H^\Sigma(\mathfrak{a})$ группу, порожденную $E(\mathfrak{a})$ и элементами $z_\alpha(r, s)$ по всем $\alpha \in \Sigma$, $r \in \mathfrak{a}$ и $s \in R$. Положим $H(\mathfrak{a}) = H^\Phi(\mathfrak{a})$. Если зафиксирован порядок на Φ, то обозначим $H^+(\mathfrak{a}) = H^{\Phi^+}(\mathfrak{a})$. Мы докажем, что $H^\Sigma(\mathfrak{a}) = E(R, \mathfrak{a})$ для специальной части Σ любого фиксированного параболического множества корней.

Этот результат усиливает теорему 1 Васерштейна и лемму 1, доказанную ван дер Калленом для $\Phi = A_l$ и параболической подгруппы P_1. Лемма ван дер Каллена была сформулирована для классических систем корней и параболической подгруппы P_1 в работе Апте–Чаттопадхиаи–Рао (практически без доказательства).

Theorem 1 (Васерштейн)**.** *Относительная элементарная подгруппа $E(R, \mathfrak{a})$ порождена элементами $z_\alpha(p, r)$ по всем $\alpha \in \Phi$, $p \in \mathfrak{a}$ и $r \in R$.*

Lemma 1. *Пусть P – параболическая подсхема в G. Тогда*

$$\langle E(\mathfrak{a}), U_P(R)\rangle \bigcap G(R, \mathfrak{a}) = E(R, \mathfrak{a}).$$

В доказательстве основного результата доклада используется идея доказательства теоремы 1, предложенная рецензентом статьи Васерштейна, переформулированная на язык параболических подгрупп, а также идея ван дер Каллена, содержащаяся в его доказательстве леммы 1. Приведем основные шаги доказательства основного результата. Обозначим через $\mathfrak{a}^{\boxed{2}}$ идеал, порожденный квадратами элементов идеала $\mathfrak{a}$. В настоящем докладе будет использоваться только частный случай этого утверждения с $\mathfrak{a} = R$.

Lemma 2. *Пусть P – параболическая подгруппа, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – идеалы кольца R. Положим $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\boxed{2}}\mathfrak{b} + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{\boxed{2}}$, если $\Phi = C_l$, а $2 \notin R^*$, и $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ в противном случае. Тогда*

$$E(\mathfrak{c}) \leqslant [U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(\mathfrak{b})]U_P(\mathfrak{a}\mathfrak{b})U_P^-(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

В любом случае, если $\mathfrak{a} = R$, то $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$.

Lemma 3.

1. *Если $\beta \neq -\alpha \in \Phi$, то $x_\alpha(p)^{x_\beta(r)} \in E(\mathfrak{a})$ для всех $p \in \mathfrak{a}$ и $r \in R$.*
2. *$EL_P(R)$ нормализует $U_P(\mathfrak{a})$ и $U_P^-(\mathfrak{a})$.*
3. *$E(\mathfrak{a})^{x_\gamma(r)} \leqslant H^+(\mathfrak{a})$ для любых $\gamma \in \Phi^-$ и $r \in R$.*
4. *Пусть Σ – специальная часть некоторого параболического множества корней. Группы $X_\alpha(R)$ по всем $\alpha \in -\Sigma$ нормализуют $H^\Sigma(\mathfrak{a})$. В частности, $U^-(R)$ нормализует $H^+(\mathfrak{a})$.*

На основании двух последних лемм доказывается теорема 1, которая затем используется при доказательстве основного результата. Еще нам понадобится следующая лемма про системы корней. Для параболического множества корней Δ через Λ_Δ обозначается его симметричная часть, а через Σ_Δ – специальная.

Lemma 4. *Предположим, что $\Phi \neq A_1$. Зафиксируем порядок на Φ, и пусть Γ – собственное подмножество Φ, содержащее все положительные корни. Тогда существует $\alpha \in \Phi \setminus \Gamma$ и параболическое множество корней Δ (возможно, соответствующее другому порядку на Φ) такие, что $\alpha \in \Lambda_\Delta$, а $\Sigma_\Delta \subseteq \Gamma$.*

Theorem 2. *Пусть Σ – специальная часть параболического множества корней. Относительная элементарная группа $E(R,\mathfrak{a})$ порождена $E(\mathfrak{a})$ и $z_\alpha(r,s)$ по всем $\alpha \in \Sigma$, $r \in \mathfrak{a}$ и $s \in R$.*

Доказательство. Мы хотим доказать, что $E(R,\mathfrak{a}) = H^\Sigma(\mathfrak{a})$. Пусть Ψ – параболическое множество корней, а Ω – его специальная часть. Сначала мы покажем, что $H^\Psi(\mathfrak{a}) = H^\Omega(\mathfrak{a})$. Для этого достаточно доказать, что $z_\alpha(p,r) \in H^\Omega(\mathfrak{a})$ для всех $p \in \mathfrak{a}$, $r \in R$ и $\alpha \in \Lambda$, где Λ – симметричная часть Ψ. Пусть P – параболическая подгруппа, соответствующая Ψ (т. е. $X_\beta \leqslant P \iff \beta \in \Psi$). Заметим, что унипотентный радикал U_P порожден X_β по всем $\beta \in \Omega$. По лемме 2 $x_\alpha(p) \in [U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(R)]U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(\mathfrak{a})$. По пункту (2) леммы 3 $x_{-\alpha}(r)$ нормализует подгруппы $U_P(\mathfrak{a})$, $U_P^-(\mathfrak{a})$, и $U_P^-(R)$. Поэтому

$$z_\alpha(p,r) = x_\alpha(p)^{x_{-\alpha}(r)} \in [U_P(\mathfrak{a}), U_P^-(R)]E(\mathfrak{a}),$$

а последняя группа содержится в $H^\Omega(\mathfrak{a})$ по пункту (4) леммы 3.

Пусть Δ обозначает множество всех корней $\alpha \in \Phi$ таких, что $H^{\{\alpha\}}(\mathfrak{a}) \leqslant H^\Sigma(\mathfrak{a})$. Другими словами, Δ – максимальное подмножесто Φ, удовлетворяющее условию $H^\Delta(\mathfrak{a}) \leqslant H^\Sigma(\mathfrak{a})$. По условию $\Sigma \subseteq \Delta$, а по первому абзацу доказательства Δ содержит параболическое множество корней. Выберем порядок на системе корней Φ такой, что $\Phi^+ \subseteq \Delta$. Предположим, что Δ является собственным подмножеством. По лемме 4 существует корень $\alpha \notin \Delta$ и параболическое подмножество Γ такие, что α принадлежит симметричной части Γ, а специальная часть Γ содержится в Δ. Снова применяя первый абзац доказательства, получим $H^{\{\alpha\}}(\mathfrak{a}) \leqslant H^{\Sigma_\Gamma}(\mathfrak{a})$. По предположению $H^{\Sigma_\Gamma}(\mathfrak{a}) \leqslant H^\Sigma(\mathfrak{a})$, откуда $H^{\{\alpha\}}(\mathfrak{a}) \in H^\Sigma(\mathfrak{a})$, т. е. $\alpha \in \Delta$. Противоречие показывает, что $\Delta = \Phi$, а это означает, что $H^\Sigma(\mathfrak{a}) = H(\mathfrak{a})$. Применяя предыдущее предложение, получаем $E(R,\mathfrak{a}) = H^\Sigma(\mathfrak{a})$. $\square$