Домашнее задание по гомоморфизмам групп

Необходимо решить по одной задаче на 5, 10 и 15 баллов. Максимальный балл за задание – 100 (даже если решите больше, получите 100). Несмотря на это имеет смысл сдавать больше, чтобы скомпенсировать ошибки.

В первых 6 задачах требуется проверить, что φ – гомоморфизм групп (в задаче 6 колец), найти его ядро и образ и написать изоморфизм, вытекающий из этих вычислений и теоремы о гомоморфизме.

1. (5 баллов) $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ задан формулой $\varphi(n) = 4n \mod 6$.
2. (5 баллов) $\varphi : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ задан формулой $\varphi(m, n) = 6m + 15n$.
3. (10 баллов) Пусть G – промежуток $[0; 1)$ с операцией $x \star y =$ дробная часть $(x+y)$ (проверьте, что $(G, \star)$ – группа). $\varphi : G \to G$ задано формулой $\varphi(x) =$ дробная часть $(7x)$.
4. (5 баллов) Пусть $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ – группа с операцией $x \star y = x + y + xy$ (проверьте, что $(G, \star)$ – группа). $\varphi : G \to \mathbb{R}^*$ задано формулой $\varphi(x) = 1 + x$.
5. (10 баллов) Пусть G – группа, а $S(G)$ – группа всех биекций множества G в себя. $\varphi : G \to S(G)$ задан формулой $\varphi(g) = f_g$, где $f_g(x) = gxg^{-1}$.
6. (10 баллов) $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ заданный формулой $\varphi(p) = p(1 + \sqrt{5})$ – гомоморфизм колец.
7. (15 баллов) Пусть H циклическая подгруппа в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденная элементом $(6, 9)$. Докажите, что $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
8. (15 баллов) Пусть $M_2(\mathbb{R})$ – аддитивная группа всех матриц 2×2 с элементами из $\mathbb{R}$, а H – подгруппа в $M_2(\mathbb{R})$, состоящая из матриц со следом 0. Докажите, что $M_2(\mathbb{R})/H \cong \mathbb{R}$.
9. (15 баллов) Пусть H – подмножество кольца $\mathbb{R}[x]$ состоящее из многочленов, имеющих корень 5. Докажите, что $\mathbb{R}[x]/H \cong \mathbb{R}$.
10. (20 баллов) Пусть B – подгруппа в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, состоящая из верхнетреугольных матриц, а U – подгруппа в B, состоящая из матриц с единицами на главной диагонали. Докажите, что $B/U \cong \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.
11. (20 баллов) Для каждого натурального n обозначим через U_n подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами по главной диагонали. Пусть H – подгруппа в U_5, состоящая из тех матриц, у которых все элементы, кроме элементов первой строки и главной диагонали, равны нулю. Докажите, что $U_5/H \cong U_4$.
12. (20 баллов) Пусть U – подгруппа в $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а H – подгруппа в U, состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте $(1, 3)$. Докажите, что $U/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.