Конспект лекций по геометрии. Гр. прикладной информатики, 2016/17 уч. г.

А.В.Степанов

Предисловие

В этих записках представлена канва курса компьютерной геометрии для группы прикладной информатики факультета исскуств СПбГУ. Текст частично заимствован из моего конспекта 3-семестрового курса алгебры для программистов. Я оставил несколько вступительных параграфов о функциях и отношениях, а также о векторных пространствах для того, чтобы согласовать терминологию.

Глава 1

Функции и отношения

1. Функции

Я далек от мысли, записать весь курс исходя только из аксиом теории множеств. Однако, на примере понятия функции мне хотелось бы показать, что можно определить любое математическое понятие не оперируя неопределенными ранее словами, что сплошь и рядом встречается в учебной литературе. Если определение начинается со слов “функция – это отображение...”, то первый же вопрос, который возникает у внимательного читателя: “А что такое отображение?”.

Определение 1.1. Кортеж длины n (другие названия: последовательность длины n или, короче, n-ка) определяется рекурсивно: кортеж длины 1 – это одноэлементное множество, кортеж длины n – это множество, состоящее из кортежа длины $n-1$ и еще одного элемента. Кортеж длины n обозначается $(a_1, \ldots, a_n)$.

Упорядоченная пара $(x, y) = \big\{\{x\}, y\big\}$ – это кортеж длины 2.

Декартово произведение множеств X и Y – это множество

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Определение 1.2. Функция – это тройка (X, Y, Γ), где X и Y – множества, а Γ – подмножество в $X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$, удовлетворяющий условию $(x, y) \in \Gamma$. При этом X называется областью определения, Y – множеством значений, а Γ – графиком функции.

Пусть $f = (X, Y, \Gamma)$ – функция. Обычно говорят, что f – это функция из X в Y и пишут $f : X \to Y$. Вместо $(x, y) \in \Gamma$ принято писать $f(x) = y$ и говорить, что y – это образ элемента x под действием функции f.

Определение 1.3. Образ функции $f : X \to Y$ – это множество $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$. Если $X' \subseteq X$, то $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$ называется образом X' под действием функции f.

Если $x \in X$, а $y = f(x)$, то x называется прообразом элемента y. Полный прообраз y – это множество всех его прообразов. Он обозначается через $f^{-1}(y)$. Полный прообраз подмножества $Y' \subseteq Y$ – это множество $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$. Ясно, что $f^{-1}(Y') = \coprod\limits_{y \in Y'} f^{-1}(y)$.

Пусть $X' \subseteq X$. Сужением функции $f : X \to Y$ называется функция $f|_{X'} : X' \to Y$, заданная формулой $f|_{X'}(x) = f(x)$. В обозначениях определения 1.2 $f|_{X'} = (X', Y, (X' \times Y) \cap \Gamma)$, где Γ – график функции f.

Лемма 1.4. *Если $f : X \to Y$ – функция, то $X = \coprod\limits_{y \in Y} f^{-1}(y)$.*

Определение 1.5. Функция $f : X \to Y$ называется

– инъективной, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$;
– сюръективной, если $\operatorname{Im} f = Y$;
– биективной, если она и инъективна, и сюръективна.

Определение 1.6. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ – функции. Композицией $g \circ f$ называется функция из X в Z, заданная формулой $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$ для любого $x \in X$. Композиция $g \circ f$ определена, только если множество значений функции f совпадает с областью определения функции g.

Тождественной функцией $id_X : X \to X$ называется функция, заданная формулой $id_X(x) = x$. Часто индекс X в обозначении тождественной функции опускают.

Функция $f^{-1} : Y \to X$ называется обратной к функции $f : X \to Y$, если $f^{-1} \circ f = id_X$, а $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Лемма 1.7. *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ – функции.*

(1) *Если $g \circ f$ инъективна, то f инъективна.*
(2) *Если $g \circ f$ сюръективна, то g сюръективна.*
(3) *Для функции f существует обратная тогда и только тогда, когда она биективна.*

Обратите внимание, что полный прообраз точки обозначается так же, как и значение обратной функции в этой точке. Это обычно не ведет к недоразумению, потому что если неизвестно, что f биективна, то про обратную функцию говорить нельзя, и $f^{-1}(y)$ означает полный прообраз точки y; если же f оказалась биекцией, то прообраз точки состоит из 1 элемента, и мы просто отождествляем одноэлементное множество с его элементом.

2. Отношения эквивалентности

Определение 2.1. Отношением на множестве X называется подмножество в $X \times X$.

Если R – отношение на X, то вместо $(x, y) \in R$ обычно пишут xRy. Это связано с тем, что конкретные отношения обычно обозначаются значками типа $\sim$ или $\geqslant$, а не буквами.

Определение 2.2. Отношение $\sim$ на множестве X называется отношением эквивалентности, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены следующие условия:

(1) $x \sim x$ (рефлексивность);
(2) $x \sim y \iff y \sim x$ (симметричность);
(3) $x \sim y \,\&\, y \sim z \implies x \sim z$ (транзитивность).

Определение 2.3. Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на X, а $x \in X$. Классом эквивалентности, содержащим x, называется множество всех элементов, эквивалентных x.

Лемма 2.4. *Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают. Множество X распадается в дизъюнктное объединение классов эквивалентности.*

Определение 2.5. Фактормножеством X по эквивалентности $\sim$ называется множество классов эквивалентности. Оно обозначается через $X/\sim$.

Глава 2

Векторные пространства

Мы рассматриваем векторные пространства только над полем вещественных чисел.

1. Основные определения

Определение 1.1. Пусть V – множество с операциями $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. Предположим, что для любых $u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнены следующие свойства:

(1) $v(\alpha\beta) = (v\alpha)\beta$;
(2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
(3) $(u + v)\alpha = u\alpha + v\alpha$;
(4) $v \cdot 1 = v$.

Тогда V называется векторным пространством.

Далее в настоящей главе используются следующие обозначения и соглашения:

- V – векторное пространство;
- $\mathbb{R}^n$ – множество столбцов высоты n;
- допуская вольность речи, элементы векторного пространства обычно называют векторами;
- по умолчанию, греческие буквы обозначают числа, строчные латинские – элементы векторного пространства и столбцы, а прописные латинские – множества, линейные операторы и матрицы;
- словосочетание "почти все" означает "все, кроме конечного числа".

Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций, которые заданы в V.

Предложение 1.2 (критерий подпространства). *Подмножество $U \subseteq V$ является подпространством в том и только том случае, если $u + v$, $u\alpha \in U$ для любых $u, v \in U$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Пусть $u_1, \ldots, u_n \in V$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \alpha_k$$

называется линейной комбинацией векторов $u_1, \ldots, u_n \in V$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Линейная комбинация называется тривиальной, если все ее коэффициенты равны нулю. Пусть $S \subseteq V$, и задан набор чисел $\alpha_s \in \mathbb{R}$, $s \in S$. Если множество S бесконечно, то операция взятия бесконечной суммы $\sum_{s \in S} s\alpha_s$ не определена. Однако, если почти все α_s равны 0, то в сумме остается только конечное число слагаемых. Таким образом, символ $\sum_{s \in S} s\alpha_s$ будет употребляться в дальнейшем и для бесконечных множеств S при условии, что почти все α_s равны 0.

Линейной оболочкой набора S называется подпространство, порожденное S, т. е. наименьшее подпространство, содержащее S. Она обозначается через $\langle S \rangle$.

Предложение 1.3. $\langle S \rangle = \{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \alpha_k \mid u_1, \ldots, u_n \in S,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$.

Если $\langle S\rangle = V$, то S называется системой образующих пространства V. Другими словами, S является системой образующих, если любой вектор выражается в виде линейной комбинации векторов из S.

Кортеж векторов $(u_1, \dots, u_n)$ называется линейно независимым, если нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю. Множество $S \subseteq V$ называется линейно независимым, если любой кортеж, составленный из конечного числа различных векторов из S, является линейно независимым. Другими словами, S линейно независимо, если для любого набора чисел $\alpha_s \in \mathbb{R}$, почти все из которых равны нулю, из равенства $\sum_{s\in S} s\alpha_s = 0$ следует, что все α_s равны нулю.

Определение 1.4. Базисом называется линейно независимая система образующих.

2. Другие определения базиса и его существование

Теорема 2.1 (эквивалентные определения базиса). *Следующие условия на подмножество S векторного пространства V эквивалентны.*

(1) *S – базис.*
(2) *S – максимальная линейно независимая система.*
(3) *S – минимальная система образующих.*
(4) *Для любого элемента $v \in V$ существует единственный набор чисел $\alpha_s \in \mathbb{R}$, почти все из которых равны нулю, такой, что $v = \sum_{s\in S} s\alpha_s$.*

Теорема 2.2 (о существовании базиса). *Пусть $X, Y \subseteq V$, причем X – линейно независима, а Y – система образующих. Тогда существует базис Z, содержащий X и содержащийся в Y.*

3. Размерность пространства и координаты вектора

Теорема 3.1 (количество элементов в базисе). *Любые два базиса пространства V равномощны.*

Определение 3.2. Размерностью пространства называется количество элементов в (любом) базисе этого пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем существует конечный базис. Для того чтобы определить координаты вектора, удобно считать, что базис конечномерного пространства – это не множество, а кортеж векторов. Начиная с этого момента и далее по умолчанию мы будем считать, что базис конечномерного пространства – это кортеж векторов. При необходимости уточнить, какое из определений базиса имеется ввиду, мы будем говорить что кортеж векторов – это упорядоченный базис.

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ – базис пространства V, а $x \in V$. По пункту (4) теоремы 2.1 x раскладывается в линейную комбинацию $f_1\alpha_1 + \dots + f_n\alpha_n$. Тогда *столбец* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\intercal$ называется столбцом координат x в базисе e и обозначается через x_e.

4. Матрицы

В предыдущем параграфе каждому элементу конечномерного пространства мы сопоставили столбец (одномерный массив). Аналогично, в следующем параграфе линейному отображению будет сопоставлена матрица (двумерный массив). Сейчас мы введем операции на множестве матриц и укажем их простейшие свойства.

Определение 4.1. Двумерный массив $m\times n$ элементов поля $\mathbb{R}$ называется матрицей размера $m\times n$ над $\mathbb{R}$. Множество всех таких матриц обозначается $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Если $m = n$, то вместо $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ пишут $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Элемент матрицы A в i-й строке и j-м столбце будут обычно обозначаться через a_{ij}.

Для двух матриц одинакового размера их сумма определена поэлементно, т. е. $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Также поэлементно определяется произведение матрицы на число: $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Произведением матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ на матрицу $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ называется матрица $C = AB \in \mathrm{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$ элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

В случае, когда количество столбцов левой матрицы не равно количеству строк правой, произведение матриц не определено.

Строка отождествляется с матрицей $1 \times n$, а столбец – с матрицей $n \times 1$. Таким образом, произведение строки длины n на столбец высоты n – это матрица 1×1, которая отождествляется с числом. Произведение же столбца на строку определено всегда, но является не числом, а матрицей соответствующего размера. Заметим, что произведение матриц некоммутативно, даже если размеры получившихся матриц равны.

Теорема 4.2. *Множество $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством.*

Произведение матриц ассоциативно, дистрибутивно и перестановочно с умножением на число, т. е. для любых матриц A, B, C и числа $\alpha \in \mathbb{R}$, как только определены соответствующие произведения, так

$$(AB)C = A(BC); \quad A(B + C) = AB + AC; \quad (B + C)A = BA + CA; \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Есть еще одна полезная унарная операция с матрицами – транспонирование.

Определение 4.3. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Матрица $A^\intercal \in \mathrm{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ с элементами $(A^\intercal)_{ij} = a_{ji}$ называется транспонированной к A.

На начальном этапе освоения материала польза транспонирования состоит в том, что оно меняет порядок сомножителей.

Предложение 4.4. *$(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$.*

Из чисто полиграфических соображений (для экономии места) для обозначения столбца часто пишется строка со знаком транспонирования, например, $(a_1, \dots, a_n)^\intercal$.

5. Линейные отображения

Определение 5.1. Пусть U и V – векторные пространства, а L – функция $U \to V$. Она называется линейным отображением, если для любых $x, y \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L(x + y) = L(x) + L(y) \text{ и } L(x\alpha) = L(x)\alpha.$$

Изоморфизмом называется биективный гомоморфизм.

Линейное отображение из пространства в себя обычно называют линейным оператором, хотя некоторые авторы используют термин “оператор”, как полный синоним термина “отображение”. Отображение из пространства в $\mathbb{R}$ часто (особенно в функциональном анализе) называют функционалом.

Ясно, что линейные отображения характеризуются тем, что сохраняют линейные комбинации векторов. Для строки векторов $v = (v_1, \dots, v_n)$ и линейного отображения L положим $L\big(v\big) = \big(L(v_1), \dots, L(v_n)\big)$. В этих обозначениях свойство линейности можно выразить следующей формулой:

$$L(va) = L(v)a, \text{ где } a \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 5.2. *Пусть U – векторное пространство, а $f = (f_1, \dots, f_n)$ – базис U. Отображение $\varphi_f : U \to \mathbb{R}^n$, заданное равенством $\varphi_f(u) = u_f$, является изоморфизмом векторных пространств.*

Следствие 5.3 (классификация конечномерных пространств). *Любое конечномерное векторное пространство изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ для некоторого n. Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.*

Предложение 5.4. *Пусть $L : U \to V$ – линейное отображение, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – базис U, а $g = (g_1, \ldots, g_m)$ – базис V. Существует матрица $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ такая, что для любого $u \in U$ имеет место равенство $L(u)_g = Au_f$.*

Доказательство. По определению столбца координат $u = fu_f$. Применяя к этому равенству отображения L и φ_g из леммы 5.2 и пользуясь их линейностью, получаем $\varphi_g \circ L(u) = \varphi_g \circ L(f)u_f$. По определению $\varphi_g \circ L(f) = \big(L(f_1)_g, \ldots, L(f_n)_g\big) \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Обозначая эту матрицу буквой A, получаем $L(u)_g = Au_f$. $\square$

Матрица A из последнего предложения называется матрицей отображения L в базисах f и g и обозначается через $L_{f,g}$. В случае, когда $U = V$, а $f = g$, говорят о матрице оператора L в базисе f и обозначают ее через L_f. Таким образом имеют место равенства

$$L(u)_g = L_{f,g}u_f \text{ или } L(u)_f = L_f u_f \text{ в случае } U = V,\ f = g.$$

Следующее утверждение является мотивировкой для определения произведения матриц. С другой стороны, его доказательство непосредственно вытекает из ассоциативности произведения матриц.

Предложение 5.5. *Матрица композиции линейных операторов является произведением матриц этих операторов. Точнее, если U, V и W – конечномерные линейные пространства с базисами f, g и h, соответственно, а $L : U \to V$ и $M : V \to W$ – линейные отображения, то $(M \circ L)_{f,h} = M_{g,h}L_{f,g}$. В частности, при $U = V = W$ и $f = g = h$ получаем $(M \circ L)_f = M_f L_f$.*

6. Замена базиса

Предложение 6.1. *Пусть f – базис n-мерного пространства V над полем $\mathbb{R}$. Набор $g = (g_1, \ldots, g_n)$ является базисом тогда и только тогда, когда существует $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ такая, что $g = fA$.*

Определение 6.2. Матрица A из предыдущего предложения называется матрицей перехода от базиса f к базису g и обозначается через $C_{f\to g}$.

Следующее утверждение вытекает из доказательства предыдущего предложения.

Следствие 6.3.

(1) *Столбец матрицы $C_{f\to g}$ с номером k равен столбцу координат вектора g_k в базисе f. Одной формулой: $(C_{f\to g})_k = (g_k)_f$.*
(2) $C^{-1}_{f\to g} = C_{g\to f}$.
(3) *Если матрица двусторонне обратима, то она квадратная.*

Предложение 6.4 (Преобразование координат при замене базиса).

(1) *Пусть f и f' – базисы пространства V.*
(2) *Для $x \in V$ имеет место равенство $x_f = C_{f\to f'}x_g$.*
(3) *Пусть g и g' – базисы пространства U, а $L : V \to U$ – линейное отображение. Тогда $L_{f',g'} = C_{g'\to g}L_{f,g}C_{f\to f'}$.*

Предложение 6.5. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – базис пространства V, а $g = (g_1, \ldots, g_n)$ – набор элементов пространства U. Тогда существует единственное линейное отображение $L : V \to U$ такое, что $L(f_i) = g_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$. При этом*

(1) *L инъективен тогда и только тогда, когда g линейно независим;*
(2) *L сюръективен тогда и только тогда, когда g – система образующих;*
(3) *L биективен тогда и только тогда, когда g базис;*

(4) *Если* $U = V$, *а* g – *базис, то* $L_f = C_{f \to g}$.

Глава 3

Евклидовы пространства

Обычно в вещественном векторном пространстве задано (положительно определенное) скалярное произведение, что позволяет говорить о длинах, углах между векторами и других величинах геометрического происхождения. В этой главе мы обсудим свойства пространств со скалярным произведением и выясним, что с точностью до обозначений все n-мерные пространства со скалярным произведением одинаковы.

1. Определение, примеры, матрица Грама

Определение 1.1. *Скалярным произведением* в вещественном линейном пространстве V называется (любая) функция ν, сопоставляющая паре векторов число и удовлетворяющая следующим условиям. Для любых $a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(1) линейность: $\nu(\alpha a + \beta b, c) = \alpha\nu(a, c) + \beta\nu(b, c)$;
(2) симметричность: $\nu(a, b) = \nu(b, a)$;
(3) положительная определенность: $\nu(a, a) > 0$, при $a \neq 0$.

Конечномерное вещественное векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым пространством. Нормой элемента $a \in V$ называется число $\sqrt{\nu(a, a)}$. Она обозначается через $\|a\|_\nu$. Обычно пишут (a, b) вместо $\nu(a, b)$ и $\|a\|$ вместо $\|a\|_\nu$, если скалярное произведение зафиксировано или не важно, о каком скалярном произведении идет речь.

Примеры.

(1) "Школьное" скалярное произведение в пространстве векторов на плоскости или в 3-мерном пространстве.
(2) Стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$: $xy = x^\intercal y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
(3) Любое скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет вид $xy = x^\intercal \Gamma y$, где Γ – некоторая симметричная матрица. При этом для любой матрицы Γ полученное равенство задает симметричную билинейную форму, но она не обязательно является положительно определенной. Условия на матрицу, при которых это так, будет обсуждаться в главе про вещественные квадратичные формы.
(4) В пространстве непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{R}$ формула $(f, g) = \int f(t)g(t)\,dt$ задает скалярное произведение.

Предложение 1.2. *Пусть V – евклидово пространство с базисом $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Тогда существует симметричная матрица Γ_f такая, что для любых $x, y \in V$*

$$(x, y) = x_f^\intercal \Gamma_f y_f.$$

Матрица Γ_f называется матрицей Грама скалярного произведения в базисе f. Как было сказано выше, не любая симметричная матрица может быть матрицей Грама.

Предложение является частным случаем предложения **??** о матрице билинейной формы, при этом симметричность Γ_f сразу следует из симметричности скалярного произведения.

2. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца и треугольника

Теорема 2.1. *Пусть V – векторное пространство (не обязательно конечномерное) с евклидовым скалярным произведением. Тогда для любых $x, y \in V$ имеют место неравенства:*

(1) $|(x, y)|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ *(неравенство Коши–Буняковского–Шварца – КБШ);*

(2) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ *(неравенство треугольника).*

Доказательство. (1). Если $y=0$, то обе части равенства равны 0, поэтому можно считать, что $y \neq 0$. $0 \leqslant \|x+y\lambda\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y)\lambda + \|y\|^2|\lambda|^2$. Положим $\lambda = -\frac{(y,x)}{(y,y)}$. Тогда последнее выражение равно $\|x\|^2 - \frac{2(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{\|y\|^2(x,y)^2}{\|y\|^4} = \|x\|^2 - \frac{(x,y)^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$. После домножения на знаменатель (который больше 0) получаем неравенство КБШ.

(2). Возводя неравенство треугольника в квадрат, получаем $(x+y,x+y) \leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|$. Раскрывая скобки в левой части и сокращая $\|x\|^2+\|y\|^2$ имеем $2(x,y) \leqslant 2\|x\|\|y\|$, что следует из неравенства КБШ. □

3. Ортогонализация

Лемма 3.1. *Набор ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независим.*

Теорема 3.2. *Пусть V – евклидово пространство, $f_1,\ldots,f_n \in V$. Положим*

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = f_2 - g_1\frac{(g_1,f_2)}{(g_1,g_1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_n = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} g_i\frac{(g_i,f_n)}{(g_i,g_i)}$$

Тогда для любых $i,j,k \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$ выполнены следующие утверждения.

(1) $(g_i,g_j)=0$.
(2) $\langle f_1,\ldots,f_k\rangle = \langle g_1,\ldots,g_k\rangle$.
(3) *Если $f_1,\ldots,f_k$ линейно независимы, то и $g_1,\ldots,g_k$ линейно независимы, в частности, $g_m \neq 0$ при всех $m=1,\ldots,k$.*
(4) *Если $f_k \in \langle f_1,\ldots,f_{k-1}\rangle$, то $g_k=0$.*
(5) *Если $(f_1,\ldots,f_n)$ – система образующих V, то ненулевые из векторов $g_1,\ldots,g_n$ образуют базис.*
(6) *Если $(f_1,\ldots,f_n)$ – базис V, то $(g_1,\ldots,g_n)$ – ортогональный базис V.*

4. Классификация евклидовых пространств

Определение 4.1. Пусть U и V – евклидовы пространства. Сюръективное линейное отображение $L : U \to V$ называется изометрией, если $\big(L(x),L(y)\big)_V = (x,y)_U$ для любых $x,y \in U$.

Лемма 4.2. *Любая изометрия является изоморфизмом.*

Доказательство. Если $L(x)=0$, то $(x,x)=(0,0)=0$, откуда $x=0$. Так как ядро нулевое, то L инъективно. □

Евклидовы пространства, между которыми существует изометрия, называются изометричными. Интуитивно, они не отличимы друг от друга с алгебраической точки зрения.

Теорема 4.3. *Любое n-мерное евклидово пространство изометрично пространству $\mathbb{R}^n$.*

Глава 4

Аффинные пространства

1. Основные определения

Определение 1.1. Аффинным пространством называется пара (A, V), состоящая из множества A и векторного пространства V, с операцией $+ : A \times V \to A$, $(M, v) \mapsto M + v$, удовлетворяющая свойствам:

(1) $(M + u) + v = M + (u + v)$ для любых $M \in A$ и $u, v \in V$;
(2) для любых $M, N \in A$ существует единственный $v \in V$ такой, что $M + v = N$.

Элементы множества A будем называть точками, а элементы пространства V – векторами. Определим разность точек $N - M$ как единственный вектор, для которого $M + v = N$.

Исторически сложилось, так что свойство $M + 0 = M$ включают в определение аффинного пространства. Однако это не обязательно, так как оно выводится из двух остальных аксиом.

Лемма 1.2. *$M + 0 = M$.*

Доказательство. Пусть $v = M - M$, т.е. $M + v = M$. Применяя это равенство 2 раза, получим $M = M + v = (M + v) + v = M + (v + v)$. По единственности получим, $v + v = v$, откуда $v = 0$. □

Лемма 1.3. *Пусть $M, N, K \in A$. Тогда $M - N = -(N - M)$ и $(K - M) - (N - M) = K - N$. Если $u, v \in V$, то $M + u = N + v \iff M - N = v - u$.*

Доказательство. $N - M = v \iff N = M + v \iff N + (-v) = M + v + (-v) = M + 0 = M \iff M - N = -v$, откуда следует первое равенство.

$K - M = u \iff K = M + u = N + (-v) + u = N + (u - v)$, откуда вытекает второе равенство.

$M + u = N + v \iff M + u - u = N + v - u \iff M = N + (v - u)$. По определению разности точек, $M - N = u - v$. □

Определение 1.4. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, а $M_1, \ldots, M_n \in A$. Выберем точку $M_0 \in V$. Если $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, положим

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (M_i - M_0) \in V$$

и назовем это *сбалансированной линейной комбинацией* точек.

Если $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, положим

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i M_i = M_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (M_i - M_1) \in A$$

и назовем это *барицентрической линейной комбинацией* точек.

Лемма 1.5. *Определения сбалансированной и барицентрической линейной комбинации не зависит от выбора точки M_0.*

Доказательство. Для сбансированной линейной комбинации надо доказать, что для любых $M, N \in A$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^n \alpha_i (M_i - M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (M_i - N)$. Так как все слагаемые лежат в V, то это равенство равносильно равенству $\sum_{i=1}^n \alpha_i \big(M_i - M) - (M_i - N)\big)$. По лемме 1.3 эта сумма равна $\sum_{i=1}^n \alpha_i (M - N) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \cdot (M - N) = 0$.

Для барицентрической линейной комбинации: $M + \sum_{i=1}^n \alpha_i(M_i - M) = N + \sum_{i=1}^n \alpha_i(M_i - N)$ по лемме 1.3 равносильно тому, что $M - N = \sum_{i=1}^n \alpha_i(M_i - N) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(M_i - M)$. Также как и в предыдущем абзаце получаем $M - N = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \cdot (M - N)$, а это верно, так как $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. $\square$

Определение 1.6. Пусть (A, V) и (A', V') – аффинные пространства. Аффинным отображением $\varphi : (A, V) \to (A', V')$ называется пара функций $\varphi_a : A \to A'$ и $\varphi_v : V \to V'$ такая, что φ_v линейна, и $\varphi_a(M + v) = \varphi_a(M) + \varphi_v(v)$ для любых $M \in A$ и $v \in V$.

Аффинное отображение называется изоморфизмом, если обе функции φ_a и φ_v биективны.

Замечание 1.7. В последнем предложении достаточно требовать, чтобы одна из функций была биективной.

2. Классификация и координаты

Пусть V – вектороное пространство. Положим $A = V$. Тогда пара (V, V) является аффинным пространством, где прибавление вектора к точке – это сложение векторов.

Теорема 2.1 (классификация аффинных пространств). *Любое аффинное пространство (A, V) изоморфно пространству (V, V). Более того, для любой точки $M \in A$ существует единственный изоморфизм $(A, V) \to (V, V)$, тождественный на V и переводящий точку M в 0.*

Доказательство. Положим $\varphi_a(X) = X - M$ и $\varphi_v = id_v$. Тогда

$$\varphi_a(X+v) = X+v-M \iff M+\varphi_a(X+v) = X+v \iff \varphi_a(X+v) = (X-M)+v = \varphi_a(X)+\varphi_v(v).$$

Следовательно, (φ_a, φ_v) – изоморфизм, переводящий M в 0. Пусть (ψ_a, id_V) – другой изоморфизм такой, что $\psi_a(M) = 0$. Тогда $\psi_a(X) = \psi_a(M + (X - M)) = \psi_a(M) + (X - M) = X - M = \varphi_a(M)$, т. е. $\psi_a = \varphi_a$, откуда следует единственность. $\square$

Выбирая базовую точку M, мы отождествляем аффинное пространство (A, V) с векторным пространством V. Для того чтобы задать координаты, необходимо еще выбрать в V базис, или, что то же самое, задать изоморфизм векторных пространств $V \to \mathbb{R}^n$, где n – размерность пространства V. Таким образом, выбор системы координат аффинного пространства (A, V), т. е. изоморфизма $(A, V) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, – это выбор базовой точки и базиса.

Замена базовой точки соответствует сдвигу, т. е., в координатной форме, преобразованию $x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$. При замена базиса координаты векторов меняются по правилу $x \mapsto Cx$, где C – обратимая матрица $n \times n$. Таким образом, при замене базовой точки и базиса координаты меняются по правилу $x \mapsto Cx + a$. Такое преобразование координат называется аффинным.

На аффинное преобразование координат можно смотреть с другой точки зрения. Пусть φ – изоморфизм аффинного пространства $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на себя. Тогда существует обратимая матрица C и столбец $a \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_a(x) = Cx + a$, а $\varphi_v(v) = Cv$.

3. Выпуклые множества

Пусть (A, V) – аффинное пространство, $M, N \in A$. Отрезком $[MN]$ называется множество $\{tM + (1-t)N \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Подмножество $D \subseteq A$ называется выпуклым, если $[MN] \subseteq D$ для любых $M, N \in D$. Выпуклой оболочкой множества $B \subseteq A$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств, содержащих B. Из определения выпуклого множества сразу следует, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Поэтому выпуклая оболочка – это наименьшее выпуклое подмножество A, содержащее B. Таким образом, для того чтобы доказать, что $\bar{B}$ является выпуклой оболчкой B, надо проверить, что

(1) $\bar{B} \supseteq B$;
(2) $\bar{B}$ выпукло;
(3) $\bar{B}$ содержится в любом выпуклом множестве, содержащем B.

Теорема 3.1. *Выпуклая оболочка множества B состоит из всех барицентрических линейных комбинаций точек из B с неотрицательными коэффициентами.*

Доказательство. Пусть

$$\bar{B} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i \mid n \in \mathbb{N},\, M_i \in B,\, \alpha_i \in \mathbb{R}_{>0},\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}.$$

При $n = 1$ получим $M_1 \in \bar{B}$ для любой точки $M_1 \in B$. Для доказательства выпуклости $\bar{B}$ докажем, что $tN + (1-t)N' \in \bar{B}$ для любого $t \in [0,1]$ и любых $N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i$ и $N' = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_i M_i$ из $\bar{B}$ (можно считать, что набор точек $M_1, \dots, M_n$ для N и N' одинаков, потому что можно включить лишние точки с нулевыми коэффициентами). Имеем

$$tN + (1-t)N' = \sum_{i=1}^{n} \big(t\alpha_i + (1-t)\alpha'_i\big) M_i.$$

Ясно, что все коэффициенты этой линейной комбинации неотрицательны, а их сумма

$$\sum_{i=1}^{n} (t\alpha_i + (1-t)\alpha'_i) = t\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = t + (1-t).$$

равна 1.

Пусть теперь $\tilde{B}$ – выпуклое множество, содержащее B. Для доказательства свойства 3 достаточно проверить, что точка $N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i$ принадлежит $\tilde{B}$ для любых $M_1, \dots, M_n \in B$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_{>0}$, сумма которых равна 1. Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 1$ доказывать нечего. Пусть $n > 1$. Положим $\beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. По индукционному предположению $K = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} M_i \in \tilde{B}$. Так как $M_n \in \tilde{B}$, а $\tilde{B}$ выпуклое, то $tK + (1-t)M_n \in \tilde{B}$ для любого $t \in [0,1]$. Заметим, что $\beta \in [0,1]$ и $1 - \beta = \alpha_n$. Следовательно,

$$\beta K + (1-\beta)M_n = \beta \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} M_i + \alpha_n M_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M_i \in \tilde{B},$$

что и требовалось доказать. □

4. Аффинные подпространства

Пусть (A, V) – аффинное пространство, $A' \subseteq A$, а $V' \leqslant V$. Пара (A', V') называется аффиным подпространством (A, V), если $a + v \in A'$ для любых $a \in A'$ и $v \in V'$. Ясно, что в этом случае (A', V') само является аффинным пространством относительно тех же операций, которые заданы в (A, V).

Далее – способы задания аффинных подпространств, если V евклидово.

5. Прямые и плоскости трехмерном пространстве

В этом параграфе мы рассмотрим специфику трехмерного пространства. Она состоит в наличии векторного произведения, соответственно можно задавать подпространство пользуясь этой операцией.

Далее – различные виды уравнений прямой и плоскости.

Глава 5

Уравнения второго порядка

1. Билинейные и квадратичные формы

Пусть V – векторное пространство.

Определение 1.1. Функция $B : V \times V \to \mathbb{R}$ называется билинейной формой, если для любых $x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеют место равенства:

$$B(x\alpha + y\beta, z) = B(x, z)\alpha + B(y, z)\beta \text{ и } B(z, x\alpha + y\beta) = B(z, x)\alpha + B(z, y)\beta.$$

Билинейная форма B называется симметричной (антисимметричной), если $B(x, y) = B(y, x)$ (соотв. $B(x, y) = -B(y, x)$) для любых $x, y \in V$.

Обозначим через $\mathrm{Bil}(V)$ – множество всех билинейных форм на V, а через $\mathrm{Bil}^{(s)}(V)$ и $\mathrm{Bil}^{(a)}(V)$ – множества симметричных и антисимметричных билинейных форм. Ясно, что все 3 множества являются подпространствами пространства всех функций $V \times V \to \mathbb{R}$ (с поточечными операциями).

Лемма 1.2. $\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Bil}^{(s)}(V) \oplus \mathrm{Bil}^{(a)}(V)$.

Доказательство. Положим $B^{(s)}(x, y) = \frac{1}{2}\big(B(x, y) + B(y, x)\big)$ и $B^{(a)}(x, y) = \frac{1}{2}\big(B(x, y) - B(y, x)\big)$. Ясно, что $B^{(s)}$ является симметричной билинейной формой, $B^{(a)}$ антисимметричной, а $B = B^{(s)} + B^{(a)}$. Тот факт, что $\mathrm{Bil}^{(s)}(V) \cap \mathrm{Bil}^{(a)}(V) = \{0\}$ очевиден. □

Определение 1.3. Функция $Q : V \to \mathbb{R}$ называется квадратичной формой, если существует билинейная форма B такая, что $Q(x) = B(x, x)$ для любого $x \in V$.

Теорема 1.4 (поляризация квадратичной формы). *Пусть Q – квадратичная форма на V, соответствующая билинейной форме B. Положим*

$$B_Q(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\big).$$

Тогда B_Q является симметризацией формы B, и $Q(x) = B_Q(x, x)$.

Таким образом, мы имеем биекцию между множеством квадратичным и симметричных билинейных форм.

2. Матрица квадратичной формы

Предложение 2.1. *Пусть B билинейная форма на V, а $f = (f_1, \dots, f_n)$ – базис V. Тогда существует матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $B(x, y) = x_f^{\tau} A y_f$ для любых $x, y \in V$.*

Определение 2.2. Матрица A, построенная в доказательстве леммы, называется матрицей билинейной формы B в базисе f и обозначается через B_f. Матрицей квадратичной формы называется матрица ассоциированной с ней *симметричной* билинейной формы.

Предложение 2.3. *Пусть B билинейная форма на V, а f и g – базисы пространства V. Тогда $B_g = C_{f \to g}^{\tau} B_f C_{f \to g}$.*

Определение 2.4. Билинейная форма называется вырожденной, если существует $v \in V \setminus \{0\}$ такой, что $B(v, x) = 0$ при всех $x \in V$.

Предложение 2.5. *Пусть B симметричная билинейная форма на V. Положим $V_0 = \{u \in V \mid B(u,v) = 0 \, \forall v \in V\}$. Если $V = V_0 \oplus U$, то сужение формы B на $U \times U$ невырождено.*

Доказательство. Заметим, что всегда существует такое U, что $V = V_0 \oplus U$ (достаточно взять базис e' подпространства V_0, дополнить его до базиса $e' \cup e''$ пространства V и породить U всеми векторами из e''). Пусть $u \in U$ такой, что $B(u,w) = 0$ для любого $w \in U$. Любой вектор $v \in V$ представляется в виде суммы $v = w + x$ для некоторых $w \in U$ и $x \in V_0$. Тогда $B(u,v) = B(u,w) + B(u,x) = 0$. Таким образом, $u \in U \cap V_0 = \{0\}$, следовательно, сужение B на $U \times U$ невырождено. □

Лемма 2.6. *Пусть Q – невырожденная квадратичная форма на V. Тогда существует вектор $v \in V$ такой, что $Q(v) \neq 0$.*

Доказательство. Если $Q(v) = 0$ для любого $v \in V$, то по формуле поляризации (см. теорему 1.4) симметричная билинейная форма B, ассоциированная с Q, нулевая, что противоречит невырожденности. □

Теорема 2.7 (диагонализация матрицы квадратичной формы). *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором ее матрица диагональна.*

Доказательство. Пусть Q – квадратичная форма на V, а B – симметричная билинейная форма, ассоциированная с Q. Мы должны доказать, что существует базис f пространства V ортогональный относительно формы B. По предложению 2.5 $V = V_0 \oplus U$, и сужение формы B на $U \times U$ невырождено. Для доказательства достаточно найти B-ортогональный базис пространства U (вектора из V_0 по определению ортогональны всем векторам).

Проведем доказательство индукцией по $n = \dim U$. Если $n = 1$, то доказывать нечего. Пусть $n > 1$. По предыдущей лемме существует $g_1 \in U$ такой, что $Q(g_1) \neq 0$. Дополним g_1 до базиса $g = (g_1, \dots, g_n)$ пространства U. Положим $h_k = g_k - \frac{B(g_k,g_1)}{Q(g_1)} g_1$ при $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$B(h_k, g_1) = B(g_k - \frac{B(g_k,g_1)}{Q(g_1)} g_1, g_1) = B(g_k, g_1) - \frac{B(g_k,g_1)}{Q(g_1)} B(g_1, g_1) = 0.$$

Таким образом, g_1 B-ортогонален всем векторам h_k при $2 \leqslant k \leqslant n$, а, следовательно, и всему подпространству $W = \langle h_2, \dots, h_n \rangle$. По индукционному предположению существует B-ортогональный базис $(f_2, \dots, f_n)$ подпространства W. Положив $f_1 = g_1$, получим ортогональный базис $(f_1, \dots, f_n)$ пространства U. □

3. Классификация квадратичных пространств

Определение 3.1. Если Q – квадратичная форма на векторном пространстве V, то пара (V,Q) называется квадратичным пространством. Квадратичное пространство называется невырожденным, если форма Q невырождена.

Морфизмом квадратичных пространств $(V,Q) \to (V',Q')$ называется линейное отображение $L : V \to V'$, обладающее свойством $Q'\big(L(x)\big) = Q\big(x\big)$ для всех $x \in V$. Биективный морфизм называется изоморфизмом.

Задача теории квадратичных форм – классификация всех конечномерных квадратичных пространств с точностью до изоморфизма. Ясно, что пространства разной размерности не могут быть изоморфны. Очевидно также, что изоморфизм сохраняет подпространство V_0 из предложения 2.5. Таким образом, достаточно классифицировать невырожденные квадратичные пространства любой фиксированной размерности.

Лемма 3.2. *Квадратичные пространства (V,Q) и (V',Q') изоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие базисы f и f' пространств V и V' соответственно, что $Q_f = Q'_{f'}$.*

Доказательство. Пусть $L(V,Q) \to (V',Q')$ – изоморфизм квадратичных пространств, а $f = (f_1,\dots,f_n)$ – базис V. Тогда $f' = \big(L(f_1),\dots,g_n\big)$ является базисом V'. Так как $Q'\big(L(x)\big) = Q\big(x\big)$, то из теоремы 1.4 следует, что $B'\big(L(x),L(y)\big) = B\big(x,y\big)$ для любых $x,y \in V$, где B и B' – симметричные билинейные формы, ассоциированные с Q и Q' соответственно. Поэтому $Q_f = Q'_{f'}$.

Обратно, если $Q_f = Q'_{f'}$, то отображение $L(x) = f'x_f$ является изоморфизмом квадратичных пространств. Действительно, $L(x)_{f'} = x_f$, поэтому

$$Q'\big(L(x)\big) = L(x)_{f'}^{\intercal} Q'_{f'} L(x)_{f'} = x_f^{\intercal} Q_f x_f.$$

□

Если матрица Q_f диагональна, а $g_k = f_k\lambda_k$, то матрица Q_g также диагональна, причем ее диагональные элементы отличаются от диагональных элементов Q_f умножением на λ_k^2. Таким образом, для невырожденных форм, играют роль только знаки диагональных элементов Q_f. Оказывается, что количество положительных и отрицательных диагональных элементов одинаково в любой диагонализации формы Q.

4. Закон инерции и критерий Сильвестра

В этом параграфе V обозначает вещественное векторное пространство размерности m.

Определение 4.1. Сигнатурой последовательности вещественных чисел называется пара чисел (p,n), где p – количество положительных среди этих чисел, а n – отрицательных.

Сигнатурой вещественной диагональной матрицы называется сигнатура последовательности ее диагональных элементов.

Лемма 4.2. *Пусть B – симметричная билинейная форма на V, а $f_1,\dots,f_k \in V$. Если $B(f_i,f_i) > 0$ при всех i, а $B(f_i,f_j) = 0$ при всех $j \neq i$, то форма B положительно определена на подпространстве $\langle f_1,\dots,f_k\rangle$.*

Теорема 4.3 (закон инерции квадратичных форм). *Пусть Q – квадратичная форма на вещественном векторном пространстве V, а f,g – базисы V такие, что матрицы Q_f и Q_g диагональны. Тогда сигнатуры матриц Q_f и Q_g равны.*

Доказательство. По предложению 2.5 можно считать, что форма B невырождена. Пусть (p_f,n_f) – сигнатура матрицы Q_f, а (p_g,n_g) – сигнатура матрицы Q_g. Перенумеровав при необходимости базисные элементы, можно считать, что положительные диагональные элементы матриц Q_f и Q_g стоят выше (и левее) отрицательных.

Предположим, что $p_f > p_g$. По предыдущей лемме форма Q положительно определена на подпространстве $U = \langle f_1,\dots,f_{p_f}\rangle$. Аналогично, Q отрицательно определена на $W = \langle g_{p_g+1},\dots,g_m\rangle$. Но по теореме о размерности ядра и образа

$$\dim U \cap W = p_f + (m - p_g) - \dim(U+W) \leqslant p_f + (m-p_g) - m = p_f - p_g > 0.$$

Следовательно, $U \cap W \neq \{0\}$, но форма Q одновременно положительно и отрицательно определена на этом подпространстве. Противоречие показывает, что неравенство $p_f > p_g$ невозможно. По аналогичным причинам невозможно и обратное неравенство, следовательно, $p_f = p_g$. □

В соответствии с законом инерции можно дать следующее определение. Сигнатурой квадратичной формы называется сигнатура ее матрицы в таком базисе, в котором эта матрица диагональна.

Определение 4.4. Векторное пространство над полем F (характеристики $\neq 2$) вместе с квадратичной формой на нем называется квадратичным пространством.

Два квадратичных пространства (V,Q) и (V',Q') называются изоморфными, если существует изоморфизм $L : V \to V'$ векторных пространств такой, что $Q'\big(L(x)\big) = Q\big(x\big)$ для любого $x \in V$.

Следствие 4.5 (классификация вещественных квадратичных форм). *Два вещественых квадратичных пространства (V, Q) и (V', Q') являются изоморфными тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim V'$, а $\operatorname{Sign} Q = \operatorname{Sign} Q'$.*

Пусть A – квадратная матрица. Минор $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ называется главным минором k-ого порядка матрицы A. Обозначим его для краткости Δ_k. По определению положим $\Delta_0 = 1$. Матрица называется унитреугольной, если она треугольна с 1 на главной диагонали.

Лемма 4.6. *Умножение на нижнюю унитреугольную матрицу слева и на верхнюю унитреугольную справа не меняет главных миноров матрицы.*

Доказательство. Так как определитель произведения равен произведению определителей, а определитель унитреугольной матрицы равен 1, то умножение на унитреугольную матрицу не меняет определителя. С помощью блочного умножения матриц не трудно убедиться, что при указанных в условии действиях $k \times k$-подматрица, стоящая в левом верхнем углу также умножается на унитреугольные матрицы. Следовательно, ее определитель не меняется. □

Теорема 4.7 (критерий Сильвестра). *Если главные миноры матрицы квадратичной формы не равны 0, то сигнатура этой формы равна сигнатуре последовательности $(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}})$.*

В частности, форма положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры больше 0.

Доказательство. Пусть Q – квадратичная форма на V, а $f = (f_1, \dots, f_m)$ – базис V. Обозначим через B симметричную билинейную форму, ассоциированную с Q. Проведем доказательство индукцией по m. При $m = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $m > 1$, $A = Q_f$. По условию первый главный минор $a_{11} \neq 0$. Пусть g – такой базис пространства V, что

$$C := C_{f \to g} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1m}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(это соответствует формулам $g_k = f_k - \frac{B(f_k, f_1)}{B(f_1, f_1)} f_1$, аналогичным процессу ортогонализации). Вычисление показывает, что $Q_g = C^\intercal Q_f C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где D – матрица сужения формы Q на подпространство $U = \langle g_2, \dots, g_m \rangle$ в базисе $(g_2, \dots, g_m)$ (обозначим это сужение через Q').

По предыдущей лемме главные миноры матриц Q_f и Q_g совпадают. Обозначим через $\gamma_1 = d_{11}, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$ главные миноры матрицы D. Тогда $\Delta_k = a_{11}\gamma_{k-1}$ для всех $k = 1, \dots, m$. По индукционному предположению сигнатура формы Q' равна сигнатуре последовательности

$$y = (\frac{\gamma_1}{\gamma_0}, \dots, \frac{\gamma_{m-1}}{\gamma_{m-2}}) = (\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}).$$

По теореме 2.7 существует такой базис $h_2, \dots, h_m$ подпространства U, что матрица Q'_h диагональна. По определению сигнатуры квадратичной формы сигнатура матрицы Q'_h равна сигнатуре последовательности y. Заметим, что в базисе $(f_1, h_2, \dots, h_m)$ форма Q имеет диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & Q'_h \end{pmatrix}$, сигнатура которой равна сигнатуре строки $(a_{11}, y) = (\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}})$, что и требовалось доказать.

Если все главные миноры положительны, то в любой диагонализации формы Q все диагональные элементы положительны. По лемме 4.2 из этого следует, что форма положительно определена. Обратно, если Q положительно определена, то все диагональные элементы матрицы этой формы в любом базисе положительны. □