ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

КОНСПЕКТ ЧАСТИ КУРСА АЛГЕБРЫ (ФКТИ, 3-Й СЕМЕСТР)

А.В.СТЕПАНОВ

Введение

Эти заметки не заменяют курс лекций, но для сильных студентов могут заменить конспект нескольких лекций, посвященных изложению алгебраических основ теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для краткости доказательства простых утверждений не приводятся.

1. Простейшие факты про линейные уравнения.

Пусть U и V – произвольные линейные пространства, $L : U \to V$ – линейный оператор.

Определение 1.1. Уравнение $L(y) = f$ называется линейным уравнением. В случае $f = 0$ оно называется однородным.

Лемма-Определение 1.2. *Множество решений однородного уравнения называется ядром оператора L, обозначается через $\operatorname{Ker} L$ и является подпространством в U.*

Определение 1.3. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения $L(y) = 0$ – это базис пространства решений этого уравнения.

Предложение 1.4 (о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения)**.** *Пусть $f \in V$, а y_* – решение уравнения $L(y) = f$. Тогда множество всех решений этого уравнения равно $y_* + \operatorname{Ker} L$.*

Если y_1 – частное решение уравнения $L(y) = f_1$, а Если y_2 – частное решение уравнения $L(y) = f_2$, то $y_1 + y_2$ является частным решением уравнения $L(y) = f_1 + f_2$.

2. Многочлены от операторов

Пусть V – линейное пространство над полем F, а H – множество всех линейных операторов из V в V. Суммой операторов M и L задается формулой $(M+L)(v) = M(v)+L(v)$. Аналогично определяется произведение числа на оператор: $(\alpha L)(v) = \alpha L(v)$, где $\alpha \in F$, а $v \in V$. Легко проверить, что H является линейным пространством относительно введенных операций.

Определение 2.1. Множество R с бинарными операциями сложения и умножения называется кольцом, если для любых $a, b, c \in R$ выполнены следующие свойства:

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
(2) $a + b = b + a$;
(3) Существует $0 \in R$ такой, что $a + 0 = a$;
(4) Для любого a существует $-a \in R$ такой, что $a + (-a) = 0$;
(5) $(ab)c = a(bc)$;
(6) $a(b + c) = ab + ac$ и $(b + c)a = ba + ca$.

Кольцо называется кольцом с единицей, если существует элемент $1 \in R$ такой, что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для всех $a \in R$.

Последние исправления: 27 сентября 2005 г.

Произведением операторов M и L назовем их композицию, т.е. $(ML)(v) = M\big(L(v)\big)$. Легко проверить, что относительно операций сложения и умножения множество H является кольцом с единицей (единицей является тождественный оператор I, заданный формулой $I(v) = v$). Если $k \in \mathbb{N}$, то L^n очевидно означает последовательное применение k раз оператора L (например, если D – оператор дифференцирования, то $D^k(y) = y^{(k)}$). В случае $k = 0$ положим $L^0 = I$ для того, чтобы было выполнено рекуррентное соотношение $L^k = LL^{k-1}$.

В случае, когда V конечномерно, а $e = (e_1, \dots, e_m)$ – базис V, сопоставление $L \mapsto L_e$ задает изоморфизм кольца H на кольцо матриц размера $m \times m$ с элементами из F (изоморфизм – это биективное отображение, сохраняющее операции, т.е. в нашем примере композиция операторов переходит в произведение матриц, а сумма – в сумму). Также, как и кольцо матриц, кольцо H не является коммутативным, т.е. в общем случае $ab \neq ba$.

Определение 2.2. Пусть $p(t) = a_nt^n + \dots + a_1t + a_0$ – многочлен с коэффициентами из F, а L – линейный оператор из H. Определим $p(L) = a_nL^n + \dots + a_1L + a_0I$.

Из свойств кольца следует, что, если $f(t) = p(t)q(t)$, то $f(L) = p(L)q(L)$.

Теорема 2.3 (о ядре произведения многочленов от оператора)**.** *Пусть дан оператор $L : V \to V$, а p и q – взаимно простые многочлены. Тогда* $\operatorname{Ker}\big(p(L)q(L)\big) = \operatorname{Ker} p(L) \oplus \operatorname{Ker} q(L)$.

Доказательство Так как p и q взаимно простые, то по теореме о линейном представлении наибольшего общего делителя существуют многочлены f и g такие, что $pf + qg = 1$, откуда $f(L)p(L)(y) + g(L)q(L)(y) = y$.

Пусть $y \in \operatorname{Ker}\big(p(L)q(L)\big)$. Положим $y_1 = f(L)p(L)(y)$, а $y_2 = g(L)q(L)(y)$ так, что $y = y_1 + y_2$. Заметим, что $q(L)(y_1) = f(L)p(L)q(L)(y) = 0$, т.е. $y_1 \in \operatorname{Ker} q(L)$. Аналогично, $y_2 \in \operatorname{Ker} p(L)$, следовательно, $y \in \operatorname{Ker} p(L) + \operatorname{Ker} q(L)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\big(p(L)q(L)\big) = \operatorname{Ker} p(L) + \operatorname{Ker} q(L)$.

Для того, чтобы доказать, что последняя сумма является прямой, надо проверить, что $\operatorname{Ker} p(L) \cap \operatorname{Ker} q(L) = \{0\}$. Пусть $y \in \operatorname{Ker} p(L) \cap \operatorname{Ker} q(L)$, т.е. $p(L)(y) = q(L)(y) = 0$. Тогда $y = f(L)p(L)(y) + g(L)q(L)(y) = 0$, что завершает доказательство. □

3. Дифференциальные операторы и теорема сдвига

С настоящего момента нас будет интересовать только пространство аналитических (бесконечно дифференцируемых) функций из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, которое будет обозначаться через C^∞, и множество операторов на этом пространстве. Через D будет обозначаться оператор дифференцирования: $D(y) = y'$.

Определение 3.1. Линейным дифференциальным оператором называется оператор, заданный формулой $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$, где a_k некоторые функции. При этом число n называется порядком оператора L.

Определение 3.2. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами – это многочлен от оператора дифференцирования, т.е. $L = p(D)$, где p – многочлен, а $D(y) = y'$.

Эквивалентно: линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами называется оператор, заданный формулой $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$, где $a_k \in \mathbb{C}$.

Замечание 3.3. Даже если изначально нас интересуют только линейные операторы с вещественными коэффициентами, в процессе решения нам придется пользоваться комплексными числами для разложения любого многочлена на линейные множители.

Лемма 3.4. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, а S_λ обозначает оператор умножения на $e^{\lambda x}$, т.е. $S_\lambda(y)(x) = e^{\lambda x}y(x)$. Тогда для любого многочлена p выполнено равенство $S_\lambda p(D) = p(D - \lambda I)S_\lambda$.*

Доказательство Докажем сначала, что $S_\lambda D = (D - \lambda I)S_\lambda$. Ясно, что $S_\lambda D(y) = e^{\lambda x}y'(x)$. С другой стороны, $(D - \lambda I)S_\lambda(y) = (D - \lambda I)(e^{\lambda x}y) = (e^{\lambda x}y)' - \lambda e^{\lambda x}y = e^{\lambda x}y'$

Теперь индукцией по k докажем, что $S_\lambda D^k = (D - \lambda I)^kS_\lambda$. При $k = 0$ равенство очевидно. База индукции (случай $k = 1$) доказана выше. Далее, $S_\lambda D^k = S_\lambda DD^{k-1} = (D - \lambda I)(S_\lambda D^{k-1})$ что по индукционному предположению равно $(D - \lambda I)(D - \lambda I)^{k-1}S_\lambda$, что равно правой части доказываемого равенства.

Общий случай сразу следует из доказанного равенства. □

Теорема 3.5 (сдвига)**.** *Пусть p – многочлен, D – оператор дифференцирования, а $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда* $\operatorname{Ker} p(D-\lambda I) = e^{\lambda x} \operatorname{Ker} p(D)$.

Доказательство Пусть $y \in \operatorname{Ker} p(D)$. Тогда $p(D-\lambda I)(e^{\lambda x}y) = p(D-\lambda I)S_\lambda(y)$, что по лемме 3.4 равно $S_\lambda p(D)(y) = 0$, т.е. $e^{\lambda x}y \in \operatorname{Ker} p(D-\lambda I)$. Это доказывает включение $e^{\lambda x} \operatorname{Ker} p(D) \subseteq \operatorname{Ker} p(D-\lambda I)$.

Обратно, если $y \in \operatorname{Ker} p(D-\lambda I)$, то $0 = p(D-\lambda I)(y) = p(D-\lambda I)S_\lambda(e^{-\lambda x}y)$, что по лемме 3.4 равно $S_\lambda p(D)(e^{-\lambda x}y)$. Следовательно, $p(D)(e^{-\lambda x}y) = 0$, т.е. $e^{-\lambda x}y \in \operatorname{Ker} p(D)$, откуда $y \in e^{\lambda x} \operatorname{Ker} p(D)$. □

4. Решение однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 4.1. Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение $L(y) = f$, где L – линейный дифференциальный оператор. Порядок оператора L называется порядком уравнения.

Множество всех функций, удовлетворяющих уравнению, называется общим решением этого уравнения. Элемент этого множества, т.е. конкретная функция, удовлетворяющая уравнению, называется частным решением этого уравнения.

Если $f = 0$, то уравнение называется однородным.

Если $L = p(D)$ – оператор с постоянными коэффициентами, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами. При этом многочлен p называется характеристическим многочленом уравнения.

Лемма 4.2. *Ядро оператора D^n (т.е. общее решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = 0$) равно множеству многочленов, степени не выше $n-1$.*

Следствие 4.3. *Пусть $p(t) = \prod_{j=1}^{m}(t-\lambda_j)^{k_j}$, а $L = p(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда*

$$\operatorname{Ker} L = \bigoplus_{j=1}^{m} e^{\lambda_j x} P_{k_j-1}$$

где P_ℓ обозначает множество многочленов, степени не выше ℓ.

Доказательство Пусть $p_j(t) = (t-\lambda_j)^{k_j}$ так, что $p = \prod p_j$. По теореме 2.3 $\operatorname{Ker} L = \bigoplus_{j=1}^{m} \operatorname{Ker} p_j(D)$. По лемме 4.2 и теореме 3.5 ядро оператора $p_j(D)$ равно $e^{\lambda_j x} P_{k_j-1}$, что завершает доказательство. □

Если многочлен p имеет вещественные коэффициенты и комплексные корни, то хотелось бы получить в ответе множество функций, принимающих вещественные значения при вещественных значениях аргумента. Напомним, что комплексно сопряженные числа имеют одинаковую кратность в любом многочлене с вещественными коэффициентами.

Лемма 4.4. *Линейная оболочка функций $\langle e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}\rangle$ совпадает с линейной оболочкой функций $\langle e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\rangle$.*

Доказательство Утверждение следует из формул

$$e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x \pm i e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2},$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2i}.$$

□

Следствие 4.5. *Пусть p – характеристический многочлен однородного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами. Предположим, что числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ и $\alpha_{\ell+1} \pm \beta_{\ell+1}, \dots, \alpha_m \pm \beta_m$ являются корнями многочлена p кратностей $k_1, \dots, k_m$. Тогда общее решение этого уравнения может быть записано в виде*

$$\operatorname{Ker} p(D) = \bigoplus_{j=1}^{\ell} e^{\lambda_j x} P_{k_j-1} \oplus \bigoplus_{j=\ell+1}^{m} \left(e^{\alpha x} \cos \beta x \, P_{k_j-1} \oplus e^{\alpha x} \sin \beta x \, P_{k_j-1}\right)$$

При этом, в отличие от следствия 4.3, если считать, что P_k – множество многочленов с вещественными коэффициентами, то мы получим все решения нашего уравнения среди функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

5. Уравнения со стандартной правой частью

Определение 5.1. Функция f называется стандартной правой частью ЛДУ если она представляется в виде $\sum_i e^{\mu_j x} p_j(x)$, где p_j – многочлены с комплексными коэффициентами.

Теорема 5.2. *Пусть $L = p(D)$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что кратность числа λ в многочлене p равна k. Тогда оператор L биективно отображает множество $x^k e^{\lambda x} P_n$ на множество $e^{\lambda x} P_n$.*

Доказательство Пусть $p(t) = q(t)(t-\lambda)^k$, где $q(\lambda) \neq 0$, а $f \in P_n$. Тогда по лемме 3.4 получим $L(x^k e^{\lambda x} f(x)) = q(D)(D-\lambda I)^k S_\lambda(x^k f(x)) = q(D) S_\lambda D^k(x^k f(x))$. При дифференцировании степень многочлена падает на 1, поэтому $D^k(x^k f(x)) \in P_n$. Далее, очевидно, что множество $e^{\lambda x} P_n$ инвариантно относительно оператора дифференцирования, следовательно, оно инвариантно относительно оператора $q(D)$. Таким образом, $q(D) S_\lambda D^k(x^k f(x)) \in q(D)(e^{\lambda x} P_n) \subseteq e^{\lambda x} P_n$. Доказали, что оператор L отображает множество $x^k e^{\lambda x} P_n$ в множество $e^{\lambda x} P_n$.

Пусть $\bar{L} : x^k e^{\lambda x} P_n \to e^{\lambda x} P_n$ – сужение оператора L (т.е. оператор, заданный той же формулой, что и L, но с суженными областью определения и областью значений). Ядро $\bar{L}$ является пересечением ядра L с областью определения $\bar{L}$, что, как нетрудно видеть, равно $\{0\}$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \bar{L} = \{0\}$. По теореме о размерности ядра и образа $\dim \operatorname{Im} \bar{L} = \dim x^k e^{\lambda x} P_n = \dim e^{\lambda x} P_n$, откуда $\operatorname{Im} \bar{L} = e^{\lambda x} P_n$. Таким образом, оператор $\bar{L}$ биективен, что и требовалось доказать. □

Теорема показывает, что, если правая часть уравнения является произведением $e^{\lambda x}$ на многочлен степени n, а кратность числа λ в характеристическом многочлене уравнения равна k, то среди функций вида $x^k e^{\lambda x}(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$ обязательно найдется ровно одно частное решение уравнения. Это дает возможность искать частное решение уравнения со стандартной правой частью в указанном виде с неопределенными коэффициентами. При этом неопределенные коэффициенты определяются после подстановки функции указанного вида в исходное уравнение. Это называется **метод неопределенных коэффициентов** для нахождения частного решения неоднородного уравнения.

Любая функция вида $e^{\alpha x}(p(x) \cos \beta x + q(x) \sin \beta x)$ лежит в подпространстве $e^{(\alpha+i\beta)x} P_n + e^{(\alpha-i\beta)x} P_n$, где n – максимальная из степеней многочленов p и q (см. формулы в доказательстве леммы 4.4). Поэтому для правых частей такого вида частное решение надо искать в множестве $x^k e^{(\alpha+i\beta)x} P_n + x^k e^{(\alpha-i\beta)x} P_n$, где k – кратность чисел $\alpha \pm i\beta$ в характерисическом многочлене исходного уравнения (мы считаем, что исходное уравнение имеет вещественные коэффициенты, а тогда кратности комплексно сопряженных чисел совпадают).

6. Метод вариации

Теорема 6.1. *Пусть $y_1, \dots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения $L(y) = 0$. Если функции $c_1, \dots, c_n$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} c_1'y_1 & +\dots+c_n'y_n & =0 \\ \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ c_1'y_1^{(n-2)} & +\dots+c_n'y_n^{(n-2)} & =0 \\ c_1'y_1^{(n-1)} & +\dots+c_n'y_n^{(n-1)} & =f \end{cases}$$

то функция $y_* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$ *является частным решением уравнения* $L(y) = f$. *При этом выписанная система уравнений всегда имеет единственное решение.*

Доказательство Докажем, что $y_*^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}$ при всех $k < n$ с помощью индукции по k. При $k = 0$ утверждение совпадает с определением y_*. Пусть $k > 0$. Тогда

$$y_*^{(k)} = \big(y_*^{(k-1)}\big)' = \big(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k-1)}\big)' = \sum_{j=1}^{n}(c_j' y_j^{(k-1)} + c_j y_j^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}$$

(второе равенство выполнено по индукционному предположению, а последнее засчет одного из уравнений системы). Аналогично получим $y_*^{(n)} = f + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(n)}$

Пусть $L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}$, где $a_n = 1$. Тогда

$$L(y_*) = f + \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)} = f + \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=0}^{n} a_k y_j^{(k)} = f + \sum_{j=1}^{n} c_j L(y_j) = f$$

так как все y_j по условию лежат в ядре оператора L.

Единственность решения системы следует из линейной независимости функций $y_1, \dots, y_j$. Этот факт мы оставляем без доказательства. □

7. Системы линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме