Примеры экзаменационных задач

А.В.Степанов

Большая часть приведенных здесь задач были выброшены из экзаменационных вариантов, потому что они слишком сложные (по крайней мере для нынешнего поколения студентов). Однако, некоторые задачи слишком просты, а некоторые – нормального уровня, но я уже приводил их в качестве примеров в этом году.

Примеры задач на доказательство

1. Докажите, что любой линейно независимый набор элементов конечномерного линейного пространства можно дополнить до базиса.

2. Докажите, что любая квадратная невырожденная матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной на верхнетреугольную. (*Указание*: воспользуйтесь процессом ортогонализации).

3. Пусть $L : V \to V$ – линейный оператор, e – базис пространства V, а p – многочлен. Докажите, что $p(L_e) = p(L)_e$.

Примеры нестандартных задач с ответом

1. Пусть P_3 – пространство многочленов степени $\leqslant 3$, а S – пространство симметричных матриц 3×3. Найдите размерность пространства всех линейных отображений из P_3 в S.

2. Пусть V – евклидово пространство всех многочленов над $\mathbb{R}$ степени $\leqslant 2$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Найдите ортогональный базис пространства V.

3. Сколько различных базисов существет в n-мерном линейном пространстве над полем из p элементов?

4. Пусть x – столбец высоты 4, а $A = x \cdot x^T$ – матрица 4×4. Найдите собственные числа матрицы A.
   Указание. Найдите сначала ранг и след матрицы A. Какую жорданову форму может иметь матрица такого ранга?

5. Даны натуральные числа $n > k$ и матрица A размера $n \times n$ ранга k. Рассмотрим множество $n \times n$ матриц X, удовлетворяющих условию $AX = XA = 0$. Докажите, что это множество является линейным пространством и найдите его размерность.

6. Найдите характеристический многочлен матрицы A размера 2×2, если $\det A = 6$, а $\operatorname{Tr} A = 7$.

7. Найдите матрицу A размера 2×2 по следующим данным: $\det A = 2$; $\mathrm{Tr}\, A = 3$; столбцы $(1, 2)^T$ и $(1, 3)^T$ являются собственными векторами матрицы A.

8. Сколько различных инвариантных подпространств имеет оператор в n-мерном пространстве с n различными собственными числами.