Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Методические указания

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
2007

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Санкт-Петербург
2007

УДК 512

Методы решения задач по алгебре и геометрии: Методические указания / Сост.: Ю. В. Крашенинникова, А. В. Степанов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2007. 44 с.

Содержат определения, формулировки основных теорем и примеры решения типовых задач по темам: "Линейные пространства", "Евклидовы пространства", "Линейные операторы", "Собственные числа и вектора", "Жорданова форма" и "Квадратичные формы", которые составляют основу II семестра курса "Алгебра и геометрия".

Предназначены студентам I и II курсов ФКТИ. Большая часть текста может быть полезна и студентам других факультетов.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

ПРЕДИСЛОВИЕ

В методических указаниях рассмотрены базовые понятия теории конечномерных линейных пространств и операторов в этих пространствах. Наша основная цель – сформулировать и проиллюстрировать на примерах алгоритмы решения задач, традиционно предлагаемых студентам ФКТИ во втором семестре курса "Алгебра и геометрия". Кроме того, авторы стремились как можно более тесно связать теорию и практику. Поэтому первая часть методических указаний содержит основные определения и формулировки основных теорем курса, а при решении задач даются ссылки на соответствующие утверждения первой части. Из соображений полноты, в первой части методических указаний приводятся не только те формулировки, которые необходимы для решения задач. Таким образом, первая часть может быть использована для повторения основных формулировок курса перед экзаменом.

Перечислим основные понятия, которые обсуждаются в методических указаниях.

1. Линейные пространства: линейная независимость, система образующих, базис и размерность пространства, сумма и пересечение подпространств.
2. Евклидовы пространства: понятие абстрактного (положительно определенного) скалярного произведения, проекция вектора на вектор, процесс ортогонализации Грама–Шмидта, решение переопределенной системы линейных уравнений (алгебраическая версия метода наименьших квадратов).
3. Линейные операторы: ядро, образ, матрица оператора.
4. Собственные числа и собственные вектора оператора.
5. Жорданова форма.
6. Квадратичные формы, уравнения кривых и поверхностей второго порядка, приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Нахождению жордановой формы матрицы отведено довольно много места, непропорционально много по сравнению со значимостью этой темы. Это обусловлено двумя причинами: во-первых, эта задача еще раз иллюстрирует важную формулу построения матрицы оператора в данном базисе; а во-вторых, при выборе алгоритма нахождения жордановой формы авторы пытались минимизировать вычислительную сложность этого алгоритма, за счет чего немного усложнилась его логика.

Предполагается, что студенты уже освоили основы матричной алгебры: умножение матриц, метод Гаусса, вычисление определителя и ранга матрицы. В большинстве решений задач матричные вычисления опущены. Кроме того, пропущены небольшие фрагменты решений, если аналогичный фрагмент уже был рассмотрен в одной из предыдущих задач. Естественно, в соответствующем месте дается необходимая ссылка.

В тексте используются следующие обозначения и соглашения:

– $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел.

– V – линейное пространство над $\mathbb{R}$.

– $\mathbb{R}^n$ – линейное пространство столбцов высоты n над $\mathbb{R}$.

– Допуская вольность речи, элементы линейного пространства обычно называют векторами.

– По умолчанию, греческие буквы обозначают числа, строчные латинские – элементы линейного пространства и столбцы, а прописные латинские – множества (например линейные пространства), линейные операторы и матрицы.

– Из чисто эстетических соображений для обозначения столбца часто пишется строка со знаком транспонирования, например, $(a_1, \ldots, a_n)^{\mathsf{T}}$.

– Единичная матрица обозначается буквой E, а *тожественный оператор* – буквой I (т. е. I – это оператор, заданный формулой $I(x) = x$). Очевидно, что матрица оператора I в любом базисе равна E, однако при первом знакомстве с предметом следует различать оператор и его матрицу.

– Пусть D – матрица размера $n \times n$, а M_D обозначает оператор умножения на эту матрицу, т. е. оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (или из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$), заданный формулой $M_D(x) = Dx$. В некоторых задачах, допуская вольность записи, будем обозначать этот оператор той же буквой, что и матрицу, для того чтобы избежать громоздкого обозначения $(M_D)_u$. Таким образом, матрица оператора M_D в базисе u будет обозначаться через D_u. В частности, если e – стандартный базис R^n, то для любой матрицы D имеем $D = D_e$.

Часть I. Определения и формулировки теорем

1. Линейные пространства

1.1. Определение линейного пространства. Множество V называется линейным пространством над полем $\mathbb{R}$, а его элементы векторами, если:

- задана операция сложения, которая любым двум элементам x и y из V сопоставляет элемент $x + y$ из V, называемый их суммой;
- задана операция умножения на число, которая элементу $x \in V$ и числу $\alpha \in \mathbb{R}$ сопоставляет элемент $\alpha x \in V$, называемый произведением x на α;
- для любых элементов $x, y, z \in V$ и любых чисел α и β выполнены следующие свойства:
  1. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
  2. существует элемент $0 \in V$ такой, что для каждого $x \in V$ выполнено $x + 0 = x$;
  3. для любого $x \in V$ существует элемент $-x \in V$ такой, что $x + (-x) = 0$;
  4. $x + y = y + x$;
  5. $\alpha(\beta)x = (\alpha\beta)x$;
  6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
  7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
  8. $1x = x$.

1.2. Определение подпространства. Подмножество U называется подпространством пространства V, если оно само является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, заданных в V.

1.3. Критерий подпространства. Подмножество U является подпространством V, если для любых $a, b \in U$ и $\alpha \in F$ выполняется:

1. $a + b \in U$;
2. $\alpha a \in U$.

Обозначение: $U \leqslant V$ (в отличие от обозначения $U \subseteq V$ для подмножества).

1.4. Линейная независимость. Набор элементов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ пространства V называется линейно независимым если уравнение

$$\alpha_1 a^{(1)} + \cdots + \alpha_n a^{(n)} = 0$$

имеет только нулевое решение.

1.5. Линейная оболочка. Линейной оболочкой элементов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ пространства V называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т. е. множество элементов вида $\alpha_1 a^{(1)} + \dots + \alpha_n a^{(n)}$, где $\alpha_i \in F$.

Эквивалентное определение: линейная оболочка – это наименьшее линейное подпространство в V, содержащее элементы $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$.

Линейная оболочка обозначается через $\langle a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \rangle$.

1.6. Система образующих. Набор элементов $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ называется системой образующих пространства V, если любой вектор из V представляется как линейная комбинация этих элементов.

Эквивалентное определение: $\langle a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \rangle = V$.

1.7. Базис. Упорядоченный набор $(e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ называется базисом пространства V, если набор $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ является линейно независимым и системой образующих.

Эквивалентное определение: для любого $x \in V$ существуют единственные $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ такие, что $x = \alpha_1 e^{(1)} + \dots + \alpha_n e^{(n)}$.

1.8. Координаты вектора. Пусть $e = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ – базис пространства V, а $x = \alpha_1 e^{(1)} + \dots \alpha_n e^{(n)} \in V$. Тогда *столбец* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\mathsf{T}$ называется столбцом координат x в базисе e и обозначается через x_e.

1.9. Количество векторов в базисе.

Теорема. Любой базис конечномерного пространства состоит из одного и того же количества элементов.

1.10. Размерность линейного пространства. Линейное пространство V называется n-мерным, если в нем существует базис из n векторов. При этом число n называется размерностью пространства V.

1.11. Размерность линейной оболочки столбцов (строк) матрицы равна рангу матрицы.

1.12. Теорема об изоморфизме конечномерных пространств. Любое конечномерное линейное пространство изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ для некоторого n (определение изоморфизма см. в 3.2).

Следствие. Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.

1.13. Сумма подпространств. Суммой $U + W$ подпространств U и W называется совокупность всевозможных векторов вида $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$. Сумма подпространств есть подпространство.

1.14. Пересечение подпространств является подпространством.

1.15. Прямая сумма подпространств. Пространство V называется прямой суммой подпространств U и W, если каждый элемент $v \in V$ может быть единственным способом представлен в виде суммы $v = u + w$, где $u \in U$, а $w \in W$. Обозначение: $V = U \oplus W$. Эквивалентная формулировка: $V = U \oplus W$, если $V = U + W$ и $U \cap V = \varnothing$. Если $V = U \oplus W$, то объединение базисов подпространств U и W есть базис пространства V.

1.16. Теорема о размерности суммы и пересечения линейных подпространств (формула Грассмана). Если U и V – подпространства линейного пространства W, то

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

1.17. Столбцы матрицы перехода от одного базиса к другому. k-й столбец матрицы $C_{f\to g}$ равен столбцу координат вектора g_k в базисе f. Одной формулой: $\left(C_{f\to g}\right)_k = (g_k)_f$.

1.18. Преобразование координат при замене базиса.

$$x_f = C_{f\to g} x_g.$$

В качестве определения матрицы перехода можно взять любую из формул 1.17 или 1.18.

2. Пространства со скалярным произведением

2.1. Скалярное произведение. Скалярным произведением в вещественном линейном пространстве V называется (любая) функция ν, сопоставляющая паре векторов число и удовлетворяющая следующим условиям. Для любых $a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. линейность: $\nu(\alpha a + \beta b, c) = \alpha\nu(a, c) + \beta\nu(b, c)$;
2. симметричность: $\nu(a, b) = \nu(b, a)$;
3. положительная определенность: $\nu(a, a) > 0$, при $a \neq 0$.

Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым пространством. Нормой элемента $a \in V$ называется число $\sqrt{\nu(a, a)}$. Она обозначается через $\|a\|_\nu$. Обычно пишут (a, b) вместо $\nu(a, b)$ и $\|a\|$ вместо $\|a\|_\nu$, если скалярное произведение зафиксировано или не важно, о каком скалярном произведении идет речь.

2.2. Неравенство Коши–Буняковского. $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$.

Геометрический смысл: $\frac{|(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|} = |\cos\widehat{x\,y}| \leqslant 1$.

2.3. Неравенство треугольника. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

2.4. Проекция одного вектора на другой. $\mathrm{pr}_b\, a = \frac{(a,b)}{(b,b)}b$ (имеется в виду вектор проекции, а не его длина).

2.5. Ортогонализация Грама–Шмидта. Пусть $(f_1, \dots, f_n)$ – базис евклидова пространства V. Тогда элементы

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 \\ e_2 &= f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 \\ &\dots\dots\dots \\ e_n &= f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(f_n, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k \end{aligned}$$

являются ортогональным базисом V. Более того, если $f_1, \dots, f_n$ – система образующих V, то ненулевые элементы набора $e_1, \dots, e_n$ образуют базис пространства V.

2.6. Координаты в ортогональном базисе. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ – ортогональный базис евклидова пространства V, а $v \in V$. Тогда k-я координата элемента v в базисе f равна $\frac{(v,f_k)}{(f_k,f_k)}$ (вектор v равен сумме его проекций на вектора ортогонального базиса, ср. 2.4).

2.7. Равенство Парсеваля. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ – ортогональный базис евклидова пространства V, а $v \in V$. Тогда $\|v\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(v,f_k)^2}{(f_k,f_k)}$. В частности, если f ортонормированный, получим $\|v\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (v, f_k)^2$.

Геометрический смысл: равенство Парсеваля – это многомерная терема Пифагора. Точнее, квадрат длины вектора равен сумме квадратов длин его проекций на вектора ортогонального базиса.

2.8. Неравенство Бесселя. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – ортогональный набор элементов евклидова пространства V, а $v \in V$. Тогда $\|v\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(v,f_k)^2}{(f_k,f_k)}$.

Геометрический смысл: длина вектора не меньше длины его ортогональной проекции на подпространство (проекция v на $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ равна $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(v,f_k)}{(f_k,f_k)} f_k$, поэтому в правой части неравенства Бесселя стоит ее длина).

2.9. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональным дополнением подпространства $U \leqslant V$ называется множество всех векторов, ортогональных каждому вектору из U. Оно обозначается через $U^{\perp}$.

Ортогональное дополнение является подпространством. Кроме того, $V = U \oplus U^{\perp}$, т. е. любой вектор $v \in V$ однозначно представляется в виде суммы $v = v^* + w$, где $v^* \in U$, а $w \in U^{\perp}$. Элемент v^* называется *ортогональной проекцией* элемента v на подпространство U.

2.10. Расстояние от вектора до подпространства. Пусть v^* – ортогональная проекция элемента v на подпространство $U \leqslant V$. Тогда для любого элемента $u \in U$, отличного от v^*, выполнено неравенство

$$\|v - v^*\| < \|v - u\|.$$

Как обычно, расстоянием от элемента v до подпространства U называется минимальное из расстояний от v до u по всем $u \in U$. Таким образом, геометрический смысл неравенства состоит в том, что расстояние от вектора до подпространства измеряется по перпендикуляру.

2.11. Матрицей Грама скалярного произведения ν в базисе $f_1, \ldots, f_n$ называется такая матрица Γ_f^{ν}, что $\nu(a, b) = a_f^{\mathsf{T}} \Gamma_f^{\nu} b_f$ для любых $a, b \in V$. Нетрудно доказать, что такая матрица существует, а ее элемент в позиции (i, j) равен $\nu(f_i, f_j)$. Скалярное произведение является, в частности, билинейной формой (определение билинейной формы см. 6.5). С этой точки зрения матрица Грама является просто матрицей билинейной формы (см. 6.6).

3. Линейные операторы

3.1. Линейным оператором называется функция из U в V, удовлетворяющая следующим условиям. Для любых $a, b \in V$ и $\alpha \in F$:

1. $L(a + b) = L(a) + L(b)$;
2. $L(\alpha a) = \alpha L(a)$.

3.2. Изоморфизмом линейных пространств называется биективный линейный оператор. Два линейных пространства U и V называются изоморфными, если существует изоморфизм из U в V.

3.3. Матрица линейного оператора. Пусть U и V – конечномерные пространства, $L : U \to V$ – линейный оператор, f – базис U, а g – базис V. Матрицей оператора L в базисах f, g называется такая матрица $L_{f,g}$, что для любого $x \in U$ выполнена формула $L(x)_g = L_{f,g} x_f$ (нетрудно доказать, что такая матрица существует и единственна).

В наиболее важном случае, когда $U = V$ и $f = g$ матрица оператора обозначается через L_f, а формула приобретает вид $L(x)_f = L_f x_f$.

3.4. Столбцы матрицы линейного оператора. $(L_f)_k = L(f_k)_f$. Эту формулу можно выразить словами: k-й столбец матрицы оператора L в базисе f равен столбцу координат элемента $L(f_k)$ в базисе f.

3.5. Преобразование матрицы оператора при замене базиса.

$$L_f = C_{f\to e} L_e C_{e\to f},$$

где e и f – базисы пространства V, а $L : V \to V$ – линейный оператор.

3.6. Ядром линейного оператора $L : U \to V$ называется множество всех тех элементов x пространства U, для которых $L(x) = 0$ (т. е. ядро линейного оператора – это пространство решений уравнения $L(x) = 0$). Обозначение: $\operatorname{Ker} L$.

3.7. Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения. Пусть $L : U \to V$ – линейный оператор, $f \in V$, а y_* – решение уравнения $L(y) = f$. Тогда множество всех решений этого уравнения равно $y_* + \operatorname{Ker} L = \{y_* + y_0 \mid y_0 \in U,\ L(y_0) = 0\}$.

3.8. Образ линейного оператора. Образом линейного оператора $L : U \to V$ называется множество всех элементов y пространства V, представимых в виде $y = L(x)$. Образ обозначается через $\operatorname{Im} L$. Другими словами, $\operatorname{Im} L = \{L(x) \mid x \in V\}$.

3.9. Теорема о размерности ядра и образа. Пусть задан оператор $L : U \to V$, где U – конечномерно. Тогда $\dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L = \dim U$.

3.10. Инвариантное подпространство. Пусть L – линейный оператор на пространстве V. Подпространство $U \leqslant V$ называется инвариантным относительно L, если $L(u) \in U$ для любого $u \in U$.

4. Собственные числа и вектора

4.1. Собственное число и вектор. Число λ называется собственным числом оператора L, если существует ненулевой вектор x такой, что $L(x) = \lambda x$. При этом вектор x называется собственным вектором оператора L, отвечающим собственному числу λ.

4.2. Собственное подпространство Если λ – собственное число оператора L, то множество всех решений уравнения $L(x) = \lambda x$ называется собственным подпространством оператора L, отвечающим собственному числу λ. Эквивалентная формулировка: собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ, – это множество собственных векторов, отвечающих λ, дополненное нулем.

4.3. Геометрическая кратность собственного числа – это размерность собственного подпространства.

4.4. Характеристический многочлен. Если A – матрица $n \times n$, то выражение $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ является многочленом степени n от переменной λ. Он называется характеристическим многочленом матрицы A. Характеристическим многочленом оператора $L : V \to V$ называется характеристический многочлен его матрицы в любом базисе пространства V (он не зависит от выбора базиса). Корни характеристического многочлена и только они являются собственными числами оператора.

4.5. Алгебраическая кратность собственного числа – это кратность этого числа в характеристическом многочлене (кратность числа α в многочлене p – это наибольшее целое k такое, что p делится на $(x-\alpha)^k$).

4.6. Теорема о линейной независимости собственных векторов. Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

4.7. След матрицы оператора не зависит от выбора базиса и равен сумме собственных чисел оператора с учетом их алгебраической кратности (след матрицы – это сумма ее элементов на главной диагонали).

4.8. Определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса и равен произведению собственных чисел оператора с учетом их алгебраической кратности.

4.9. Ранг матрицы оператора не зависит от выбора базиса и равен размерности образа этого оператора.

4.10. Критерий диагонализуемости оператора. L – диагонализуем тогда и только тогда, когда существует базис из его собственных векторов (оператор называется диагонализуемым, если существует базис пространства V, такой что матрица оператора в этом базисе является диагональной).

4.11. Достаточное условие диагонализуемости оператора. Если оператор $L : V \to V$ имеет $n = \dim V$ различных собственных чисел, то оператор диагонализуем. Это условие не является необходимым, т. е. существуют диагонализуемые операторы, у которых не все собственные числа различны.

4.12. Критерий диагонализуемости оператора в терминах алгебраической и геометрической кратности. Оператор L диагонализуем над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда алгебраическая кратность любого собственного числа равна его геометрической кратности.

5. Жорданова форма

5.1. Корневое подпространство. Пусть характеристический многочлен линейного оператора L раскладывается на множители

$$\chi_L(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$

где все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ попарно различны. Тогда подпространство

$$K_i = \operatorname{Ker}(L - \lambda_i I)^{k_i} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

называется корневым подпространством оператора L, отвечающим собственному числу λ_i, а его ненулевые вектора – корневыми векторами.

Собственное подпространство содержится в соответствующем корневом подпространстве: $\operatorname{Ker}(L - \lambda_i I) \leqslant \operatorname{Ker}(L - \lambda_i I)^{k_i}$.

Размерность корневого подпространства равна алгебраической кратности соответствующего собственного числа.

5.2. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств. Для любого оператора L, действующего в комплексном пространстве V, это пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора L:

$$V = K_1 \oplus \ldots \oplus K_s.$$

Если оператор действует в вещественном пространстве, то утверждение справедливо, если все корни характеристического многочлена оператора L вещественны.

5.3. Высота корневого вектора. Пусть K – корневое подпространство оператора L, отвечающее собственному числу λ. Высотой вектора $x \in K$ называется число h, такое, что $(L - \lambda I)^h(x) = 0$, но $(L - \lambda I)^{h-1}(x) \neq 0$. Собственные вектора имееют высоту 1.

5.4. Жорданова форма. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{pmatrix} \qquad \text{где} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

называется жордановой матрицей или жордановой формой матрицы оператора.

Теорема. Для любого оператора, действующего в *комплексном* линейном пространстве, существует базис, в котором его матрица жорданова. Такой базис называется *жордановым базисом* оператора.

Естественно, любая из клеток может иметь размер 1×1. Если все жордановы клетки имеют такой размер, то жорданова форма – это просто диагональная форма матрицы оператора.

5.5. Жордановой цепочкой , соответствующей собственному числу λ, называется набор векторов $e^0, \dots, e^k$, удовлетворяющих равенствам

$$(L - \lambda I)(e^0) = 0 \text{ и } (L - \lambda I)(e^\ell) = e_i^{\ell-1} \text{ при } \ell \geqslant 1.$$

При этом e^i называют i-м вектором, присоединенным к e^0. Очевидно, i-й присоединенный вектор является корневым вектором высоты $i + 1$.

Пусть вектора $e_1^0, \dots, e_1^{k_1}, \dots, e_m^0, \dots, e_m^{k_m}$ образуют жорданов базис оператора L так, что набор $e_i^0, \dots, e_i^{k_i}$ соответствует i-му жорданову блоку. Тогда, по определению жорданова блока, выполняются равенства $(L - \lambda_i I)(e_i^0) = 0$ и $(L - \lambda_i I)(e_i^\ell) = e_i^{\ell-1}$ при $\ell \geqslant 1$. Таким образом, жорданов базис состоит из жордановых цепочек.

6. Самосопряженные операторы и квадратичные формы

6.1. Самосопряженный оператор. Оператор L в унитарном (евклидовом) пространстве V называется самосопряженным, если

$$\big(L(x), y\big) = \big(x, L(y)\big) \text{ для всех } x, y \in V.$$

Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе евклидова пространства является симметричной. Обратно, оператор умножения на симметричную матрицу в $\mathbb{R}^n$ (со стандартным скалярным произведением) является самосопряженным. Поэтому все утверждения про собственные числа и вектора самосопряженного оператора верны и для собственных чисел и векторов симметричной матрицы.

6.2. Теорема о собственных векторах самосопряженного оператора. Собственные вектора самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным числам, попарно ортогональны.

6.3. Теорема о собственных числах самосопряженного оператора. Собственные числа самосопряженного оператора вещественны.

6.4. Теорема о диагонализуемости самосопряженного оператора. Существует ортонормированный базис, в котором матрица данного самосопряженного оператора диагональна.

6.5. Билинейной формой называется функция $B : V \times V \to F$, удовлетворяющее свойствам $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$ и $B(w, \alpha u + \beta v) = \alpha B(w, u) + \beta B(w, v)$. Билинейная форма B называется **симметричной**, если $B(u, v) = B(v, u)$ для любых $u, v \in V$.

6.6. Матрицей билинейной формы B в базисе $f = (f_1, \dots, f_n)$ называется такая матрица B_f, что $B(u, v) = u_f^\intercal Q_f v_f$ для любых $u, v \in V$. (Нетрудно доказать, что такая матрица существует, а ее элемент в позиции (i, j) равен $B(f_i, f_j)$.)

6.7. Квадратичная форма. Пусть B – симметричная билинейная форма на V. Функция $Q : V \to F$, заданная формулой $Q(v) = B(v, v)$, называется квадратичной формой, ассоциированной с B.

Для несимметричной билинейной формы A можно взять ее *симметризацию*

$$B(u, v) = \frac{1}{2}\big(A(u, v) + A(v, u)\big)$$

так, чтобы $A(v, v) = B(v, v)$.

По форме Q можно восстановить форму B с помощью *поляризации*:

$$B(u, v) = \frac{1}{2}\big(Q(u + v) - Q(u) - Q(v)\big).$$

6.8. Матрицей квадратичной формы Q в базисе $f = (f_1, \dots, f_n)$ называется такая матрица Q_f, что $Q(v) = v_f^\intercal Q_f v_f$ для любого $v \in V$. (Нетрудно доказать, что такая матрица существует, а ее элемент в позиции (i, j) равен $B(f_i, f_j)$, где B – ассоциированная с Q симметричная билинейная форма.) Другими словами, матрица квадратичной формы – это матрица ассоциированной с ней симметричной билинейной формы.

Если $Q(x) = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, то элементы матрицы формы Q в стандартном базисе равны: $(Q_e)_{ii} = a_{ii}$, а $(Q_e)_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij}$ при $i \neq j$.

6.9. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене базиса. $Q_f = C^{\mathsf{T}}_{e\to f}Q_eC_{e\to f}$, где e и f – базисы пространства V, а $Q : V \to F$ – квадратичная форма.

6.10. Приведение квадратичной формы к диагональному виду. Пусть Q квадратичная форма на линейном пространстве V (над произвольным полем, в котором $1 + 1 \neq 0$). Существует базис, в котором матрица квадратичной формы Q диагональна.

6.11. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием. Пусть Q квадратичная форма на евклидовом пространстве V. Существует ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы Q диагональна.

6.12. Закон инерции квадратичных форм. Пусть Q – квадратичная форма на вещественном линейном пространстве V, а e и f – различные базисы пространства V, в которых матрица формы Q диагональна. Тогда количество положительных (отрицательных) диагональных элементов в матрицах Q_e и Q_f одинаково.

6.13. Сигнатура вещественной квадратичной формы. Сигнатурой вещественной диагональной матрицы A называется пара чисел (p, n), где p – количество положительных, а n – отрицательных диагональных элементов матрицы A.

Пусть Q – квадратичная форма, а f – такой базис, что матрица Q_f диагональна. Тогда сигнатурой формы Q называется сигнатура матрицы Q_f (закон инерции утверждает, что сигнатура матрицы Q_f не зависит от выбора базиса f).

Часть II. Примеры решения задач

Задача 1. Базис линейной оболочки

Найти базис линейной оболочки строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение (1-й способ). Осуществляя преобразования Гаусса над строками матрицы A, приведем ее к трапециевидной форме:

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(мы переставили пятую строку на первое место, сменили ее знак, получили нули в первом столбце, вычитая из всех строк строки, кратные первой, после чего избавились от пропорциональных строк).

Так как матрица B получена из A преобразованиями Гаусса, то строки матрицы B представляют собой линейные комбинации строк матрицы A и, следовательно, принадлежат линейной оболочке строк матрицы A. Кроме того, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2$, откуда размерность линейной оболочки строк матрицы A равна 2 (см. 1.11), и в качестве базиса можно выбрать две ненулевых строки матрицы B: $e_1 = (1, 1, -4, -3, -4)$, $e_2 = (0, -1, 6, 5, 6)$ (так как B имеет трапециевидную форму, то ее ненулевые строки линейно независимы).

Решение (2-й способ). Этот способ решения опирается на следующее утверждение: линейные зависимости между строками матрицы не меняются при элементарных преобразованиях столбцов. Осуществляя преобразования над столбцами матрицы A, приведем ее к виду

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C = 2$. Вид матрицы C позволяет сразу определить, какие пары ее строк линейно независимы. Например, первая и четвертая строчки. Но тогда, в силу приведенного выше

утверждения, линейно независимую систему будут образовывать первая и четвертая строки исходной матрицы A. Итак, $e_1 = (7, 3, -4, -1, -4)$, $e_2 = (2, 1, -2, -1, -2)$ – базис линейной оболочки строк матрицы A.

Замечание 1. Обратите внимание, что базисные вектора во втором случае выбираются среди векторов системы, порождающей линейное подпространство (линейную оболочку сток матрицы), в то время как базисные вектора, найденные первым способом не обязаны принадлежать системе образующих.

Замечание 2. В случае, когда в задаче речь идет о линейной оболочке столбцов матрицы, то, решая ее первым способом, нужно осуществлять преобразования над столбцами исходной матрицы, а во втором случае над строками, опираясь на тот факт, что линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются при элементарных преобразованиях строк.

Задача 2. Базис пространства решений однородной системы

Найти базис пространства решений системы $Ax = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ 7 & 3 & -4 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решим однородную систему методом Гаусса. Воспользуемся результатом, полученным в задаче 1: $A \sim B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначая столбец неизвестных через $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, из первого уравнения получаем $x_1 = -2x_3 - 2x_4 - 2x_4$, а из второго $x_2 = 6x_3 + 5x_4 + 6x_4$.

Тогда решение системы имеет вид $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$.

Так как выписанные в последней формуле столбцы линейно независимы (матрица, составленная из них, содержит единичную подматрицу 3×3), то они образуют базис пространства решений системы.

Ответ: $e_1 = (-2, 6, 1, 0, 0)^\mathsf{T}$, $e_2 = (-2, 5, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$, $e_3 = (-2, 6, 0, 0, 1)^\mathsf{T}$.

Замечание 1. С точки зрения компьютерного алгоритма: как только Вы привели матрицу A к трапецеидальному виду $\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Вы можете записать ответ в виде $(e_1, \ldots, e_n) = \begin{pmatrix} -C \\ E \end{pmatrix}$.

Задача 3. Базис суммы и пересечения

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств V_1 и V_2 в $\mathbb{R}^4$, натянутых на системы векторов: $a_1 = (1, 2, 0, 1)^\mathsf{T}$, $a_2 = (1, 1, 1, 0)^\mathsf{T}$, $a_3 = (0, 1, -1, 1)^\mathsf{T}$ и $b_1 = (1, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$, $b_2 = (1, 3, 0, 1)^\mathsf{T}$, $b_3 = (0, 3, -1, 1)^\mathsf{T}$.

Решение (1-й способ). Так как $V_1 + V_2$ есть линейная оболочка системы векторов $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, то базис суммы подпространств может быть найден с помощью рассуждений, приведенных в задаче 1. Составим матрицу $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$, столбцами которой являются все данные вектора. Упрощаем ее с помощью элементарных преобразований столбцов с условием: преобразования столбцов матриц A и B осуществляем отдельно. Получаем $(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

На этом этапе преобразований можно сделать выводы:

1. $\dim V_1 = \operatorname{rank} A = 2$; $c_1 = (1, 1, 1, 0)^\mathsf{T}$, $c_2 = (0, 1, -1, 1)^\mathsf{T}$ – базис V_1;
2. $\dim V_2 = \operatorname{rank} B = 2$; $t_1 = (1, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$, $t_2 = (0, 3, -1, 1)^\mathsf{T}$ – базис V_2.

Теперь, когда найдены базисы в подпространствах V_1 и V_2, можно отбросить черту, разделяющую матрицы A и B, и продолжить преобразования над столбцами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\dim(V_1+V_2) = \operatorname{rank}(A|B) = 3$, вектора $(1,0,1,0)^\mathsf{T}$, $(0,1,0,0)^\mathsf{T}$, $(0,0,-1,1)^\mathsf{T}$ образуют базис в V_1+V_2. Для определения размерности пересечения подпространств воспользуемся формулой Грассмана (см. п. 1.16): $\dim(V_1 \cap V_2) = 2+2-3 = 1$.

Осталось найти базис пересечения подпространств. Пусть вектор $v \in V_1 \cap V_2$. Тогда $v = \alpha c_1 + \beta c_2 = \gamma t_1 + \eta t_2$. Отсюда $\alpha c_1 + \beta c_2 - \gamma t_1 - \eta t_2 = 0$. Составим эту систему и решим ее:

$$\begin{cases} \alpha \qquad - \gamma \qquad = 0 \\ \alpha + \beta \qquad - 3\eta = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + \ \eta = 0 \\ \qquad \beta \qquad - \ \eta = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Подставив найденные коэффициенты в разложение вектора v по базису подпространства V_1, получим:

$$v = 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ответ: базис $V_1 \cap V_2$ состоит из одного вектора $(2,3,1,1)^\mathsf{T}$.

Решение (2-й способ). Определим размерности V_1 и V_2, выберем в них базисы и одновременно найдем однородные системы уравнений, определяющие данные подпространства. С этой целью составим матрицы A и B, столбцами которых являются вектора первой и второй системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем расширенную матрицу $(A|E)$ методом Гаусса со строками так, чтобы в левой части получилась трапецеидальная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Обозначим последнюю матрицу через $\left(\begin{array}{c|c} C & D_1 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)$. Столбец b принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы A тогда и только тогда, когда система $Ax = b$ имеет решение. Так как преобразования Гаусса соответствуют умножению слева на обратимую матрицу, то системы уравнений $Ax = b$ и $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} b$ равносильны. Поэтому система $Ax = b$ имеет решение тогда и только тогда, когда $D_2 b = 0$ (система $Cx = D_1 b$ имеет решение при любом b). Отсюда можно сделать следующие выводы:

1. $\dim V_1 = \operatorname{rank} A = 2$;
2. a_1, a_3 – базис пространства V_1 (см. задачу 1, 2-й способ решения);
3. $b \in V_1 \iff D_2 b = 0$.

Рассуждая аналогичным образом, для подпространства V_2 имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно:

1. $\dim V_2 = \operatorname{rank} B = 2$;
2. b_1, b_3 – базис пространства V_2;
3. $b \in V_2 \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} b = 0.$

В качестве базиса суммы подпространств можно выбрать любую максимальную линейно независимую подсистему системы векторов a_1, a_3, b_1, b_3, например: a_1, a_3, b_1. Размерность подпространства $V_1 + V_2$ равна 3. Найдем базис и размерность пересечения подпространств. Если $v \in V_1 \cap V_2$, то он является решением обеих систем. Поэтому $V_1 \cap V_2$ совпадает с пространством решений системы

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) b = 0,$$

составленной из всех уравнений, определяющих V_1 и V_2. Решив ее, получим $b = (2, 3, 1, 1)^{\mathsf{T}} \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Значит, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, а вектор $(2, 3, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ образует базис $V_1 \cap V_2$.

Задача 4. Ортогонализация двух векторов

Даны столбцы $a = (-4, 5, -2, -1)^\mathsf{T}$ и $b = (5, -3, 4, 3)^\mathsf{T}$. Найти столбец $c \in \mathbb{R}^4$, ортогональный a так, чтобы линейные оболочки $\langle a, c\rangle$ и $\langle a, b\rangle$ совпадали.

Решение. Как раз для этой задачи предназначен процесс ортогонализации (см. 2.5):

$$c = b - \frac{(a,b)}{(a,a)}a = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-46}{46}\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $c = b - \alpha a$ есть линейная комбинация a и b, то $c \in \langle a, b\rangle$. Аналогично, $b \in \langle a, c\rangle$, откуда $\langle a, c\rangle = \langle a, b\rangle$. Легко заметить, что любой вектор, пропорциональный найденному, также удовлетворяет условию задачи. С другой стороны, ортогональное дополнение к вектору a в 2-мерном пространстве $\langle a, b\rangle$ одномерно, поэтому никакой вектор, не пропорциональный найденному, не годится.

Ответ: $c = (1, 2, 2, 2)^\mathsf{T}\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим другую формулировку той же задачи.

Разложение в сумму ортогональных векторов. Даны столбцы $a = (-4, 5, -2, -1)^\mathsf{T}$ и $b = (5, -3, 4, 3)^\mathsf{T}$. Разложить b в сумму двух ортогональных столбцов так, чтобы один из них был параллелен a.

Решение. Пусть $b = c + \alpha a$, причем $c \perp a$. Тогда $(c, a) = (b - \alpha a, a) = 0$, откуда $\alpha = \frac{(a,b)}{(a,a)}$, и мы получаем ту же формулу для вектора c, что и в предыдущей задаче: $c = b - \frac{(a,b)}{(a,a)}a$.

Ответ: $c = (1, 2, 2, 2)^\mathsf{T}$.

Задача 5. Ортогонализация и псевдорешение

Даны $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать столбцы матрицы A и найти псевдорешение системы $Ax = b$.

Решение. Выполним первую часть задания, используя метод ортогонализации Грама–Шмидта (см. 2.5). Обозначим столбцы матрицы A: $a_1 = (-1, -1, 1, -1)^\mathsf{T}$; $a_2 = (-4, -4, 1, -1)^\mathsf{T}$; $a_3 = (-1, -5, -1, 4)^\mathsf{T}$. Положим $e_1 = a_1$. Второй вектор ищем в виде $e_2' = a_2 - \frac{(a_2,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1$. Тогда и

$e_2' = (-3/2, -3/2, -3/2, 3/2)^\mathsf{T}$. Для удобства дальнейших вычислений положим $e_2 = -\frac{2}{3}e_2' = (1, 1, 1, -1)^\mathsf{T}$. Это можно сделать, так как умножение на константу не влияет на ортогональность векторов. Последний вектор ищем в виде $e_3' = a_3 - \frac{(a_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1 - \frac{(a_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2$. Получаем $e_3' = (2, -2, 3/2, 3/2)^\mathsf{T}$. Положим $e_3 = 2e_3' = (4, -4, 3, 3)^\mathsf{T}$.

Перейдем ко второй части задачи. Можно убедиться, что система $Ax = b$ несовместна, хотя это не влияет на ход решения. Это означает, что столбец b не принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы A. В этом случае система называется *переопределенной*. Псевдорешением переопределенной системы линейных уравнений называется такой столбец x^*, что длина вектора $Ax^* - b$ минимальна. Длина вектора $Ax^* - b$ минимальна, если он ортогонален линейной оболочке столбцов матрицы A, то есть вектор Ax^* является ортогональной проекцией вектора b на линейную оболочку столбцов матрицы A (см. утверждение 2.10). Введем обозначения: пусть V – линейная оболочка столбцов матрицы A, b^* – ортогональная проекция вектора b на подпространство V. Так как ортогональный базис e_1, e_2, e_3 пространства V уже известен, то можно найти b^*, как сумму проекций вектора b на базисные вектора e_i (см. 2.6), т. е.

$$b^* = \frac{(b, e_1)}{(e_1, e_1)}e_1 + \frac{(b, e_2)}{(e_2, e_2)}e_2 + \frac{(b, e_3)}{(e_3, e_3)}e_3$$

(формула верна только для ортогонального базиса!).

Получим $b^* = (2, 14, 7, -16)^\mathsf{T}$. Осталось решить систему $Ax^* = b^*$.

Ответ: ортогонализованные столбцы матрицы A:

$$e_1 = (-1, -1, 1, -1)^\mathsf{T};\ e_2 = (1, 1, 1, -1)^\mathsf{T};\ e_3 = (4, -4, 3, 3)^\mathsf{T}.$$

Псевдорешение системы: $x^* = (5, -1, -3)^\mathsf{T}$.

Замечание 1. Вычисления во второй части задачи можно несколько упростить. В процессе вычислений мы находим столбец координат вектора b^* в базисе e, он состоит из чисел $\frac{(b,e_i)}{(e_i,e_i)}$. Из процесса ортогонализации легко извлечь выражения векторов a_i через e_i, т. е. матрицу перехода $C_{e\to a}$, и убедиться в том, что она треугольная. Решаем систему $C_{e\to a}b_a^* = b_e^*$ и из равенства $Ax^* = b^*$ замечаем, что x^* как раз и является столбцом координат вектора b^* в базисе, составленном из столбцов матрицы A. Упрощение вычислений состоит в том, что достаточно решить систему с *треугольной* матрицей, что на порядок проще решения произвольной системы.

Замечание 2. Для нахождения псевдорешения системы можно воспользоваться формулой $x^* = (A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}b$, т. е. достаточно решить систему линейных уравнений $(A^\mathsf{T}A)x^* = A^\mathsf{T}b$ (если столбцы матрицы A линейно независимы, то матрица $A^\mathsf{T}A$ невырожденная). Однако количество вычислений при использовании этого способа решения примерно равно количеству вычислений при решении с использованием ортогонализации и замечания 1.

Задача 6. Дополнение до ортогонального базиса

Подпространство $V \leqslant \mathbb{R}^4$ натянуто на вектора: $a_1 = (1,1,2,2)^\mathsf{T}$ и $a_2 = (10,4,-1,-1)^\mathsf{T}$. Ортогонализовать базис в V и дополнить его до ортогонального базиса в $\mathbb{R}^4$.

Решение. Ортогонализуем вектора a_1 и a_2 их с помощью процесса Грама–Шмидта (см. 2.5):

$$b_1 = a_1; \qquad b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{10}{10}\begin{pmatrix}10\\4\\-1\\-1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Далее будем брать произвольные вектора из $\mathbb{R}^4$, добавлять их к полученному ранее набору $b_1, b_2, \ldots$ и применять к ним процесс ортогонализации. Если получившийся в результате ортогонализации вектор будет ненулевым, то присоединим его к нашему набору, в противном случае просто возьмем другой произвольный вектор. Прекратим процесс, когда количество полученных ненулевых попарно ортогональных векторов станет равным размерности пространства, т. е. четырем. Для того чтобы гарантировать, что процесс закончится (т. е., что мы не будем все время выбирать произвольный вектор из линейной оболочки ранее полученных), достаточно перебирать вектора из какого-нибудь базиса пространства $\mathbb{R}^4$. Для упрощения вычислений будем перебирать вектора стандартного базиса. Заметим также, что проекция вектора a на вектор b равна его проекции на вектор λb при любом $\lambda > 0$, что также будет использоваться для упрощения вычислений. Итак:

$$b_3 = e_1 - \frac{(e_1,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 - \frac{(e_1,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{-3}{12}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}3\\-7\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$b_4 = e_2 - \frac{(e_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(e_2, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(e_2, b_3)}{(b_3, b_3)} b_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-7}{60} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как оказалось, что $b_4 = 0$, то отбрасываем e_2 (как оказалось, он лежит в линейной оболочке $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$) и пересчитываем b_4, исходя из e_3:

$$b_4 = e_3 - \frac{(e_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(e_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(e_3, b_3)}{(b_3, b_3)} b_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: ортогональный базис V: $b_1 = (1, 1, 2, 2)^{\mathsf{T}}$, $b_2 = 3(-3, -1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$. Он дополняется до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}^4$ векторами $b_3 = \frac{1}{20}(3, -7, 1, 1)^{\mathsf{T}}$, $b_4 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1)^{\mathsf{T}}$.

Замечание 1. Ясно, что вектора b_3 и b_4 образуют ортогональный базис пространства $V^{\perp}$. Поэтому альтернативный способ нахождения этих векторов состоит в том, чтобы найти базис $V^{\perp}$ как базис пространства решений системы $\begin{pmatrix} b_1^{\mathsf{T}} \\ b_2^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} x = 0$, после чего ортогонализовать его.

Задача 7. Выбор базиса и нахождение матрицы оператора

Пусть V – линейное пространство всех вещественных матриц 2×2 со следом 0. Выберите базис в пространстве V и найдите матрицу оператора L в этом базисе, если $L(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение. След рассматриваемых матриц равен 0, а значит элементы пространства имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому размерность пространства V равна 3 и в качестве базиса e можно взять набор элементов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбранный базис хорош тем, что столбец координат любого элемента пространства в этом базисе виден сразу: для приведенной выше матрицы A столбец координат $A_e = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$.

Столбцами матрицы линейного оператора являются столбцы координат образов базисных векторов, т. е. i-й столбец матрицы L_e равен $L(e_i)_e$ (см. 3.4). Найдем образы базисных векторов:

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad L(e_2) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad L(e_3) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишем столбцы координат: $L(e_1) = (0, 8, 4)^{\mathsf{T}}$; $L(e_2) = (-2, 5, 0)^{\mathsf{T}}$; $L(e_3) = (-4, 0, -5)^{\mathsf{T}}$.

Ответ: $L_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 8 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Матрица оператора проектирования

Вычислить матрицу линейного оператора A, проектирующего вектора трехмерного геометрического пространства V на плоскость $P : 3x - y = 0$ параллельно прямой $\ell : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x \qquad + \ z = 0 \end{cases}$, в стандартном базисе.

Решение. Задача имеет смысл, если $P \cap \ell = \{0\}$. Действительно, решив однородную систему $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x \qquad + \ z = 0 \\ 3x - y \qquad = 0 \end{cases}$, определяющую подпространство $P \cap \ell$, убеждаемся, что она имеет единственное нулевое решение. Сумма размерностей плоскости и прямой равна 3, т. е. размерности V. Следовательно, V раскладывается в прямую сумму: $V = P \oplus \ell$ (см. определение 1.15). Значит, объединение базисов плоскости и прямой есть базис в V. Находя базис пространства решений однородной системы (см. задачу 2), выберем базис плоскости: $f_1 = (0, 0, 1)^{\mathsf{T}}$; $f_2 = (1, 3, 0)^{\mathsf{T}}$ и базис прямой: $f_3 = (1, 1, -1)^{\mathsf{T}}$. Матрица оператора A может быть легко составлена в базисе $f = (f_1, f_2, f_3)$. Действительно, по определению проектирования, вектора плоскости P переходят в себя, а вектора с прямой

ℓ переходят в 0. Поэтому $A(f_1) = f_1$, $A(f_2) = f_2$, а $A(f_3) = 0$, откуда $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (см. 3.4, а также задачу 7).

Составим матрицу перехода от стандартного базиса e к базису f и найдем обратную к ней:

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C_{f\to e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(подробнее о нахождении матриц перехода см. п. 1 задачи 9). Для того чтобы найти матрицу оператора проектирования в стандартном базисе осталось воспользоваться формулой 3.5, связывающей матрицы оператора в различных базисах:

$$A_e = C_{e\to f} A_f C_{f\to e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Вектора и операторы в $\mathbb{R}^3$

Пусть e – стандартный базис в $\mathbb{R}^3$, $f_1 = (1, 1, -1)^\intercal$, $f_2 = (-1, -1, 2)^\intercal$, $f_3 = (-2, -1, 0)^\intercal$. Даны линейные операторы A и B, имеющие в базисе e следующие матрицы:

$$A_e = \begin{pmatrix} 13 & -15 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \\ 7 & -25 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B_e = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 10 \\ -3 & -18 & 16 \\ -3 & -18 & 16 \end{pmatrix},$$

и вектор x с координатами $x_e = (1, 7, 9)^\intercal$.

1. Проверьте, что $f = (f_1, f_2, f_3)$ – базис в $\mathbb{R}^3$ и найдите матрицы перехода $C_{e\to f}$, $C_{f\to e}$.

2. Определите координаты вектора $y = A \circ B(x)$ в базисе f.

3. Обратимы ли операторы A и B?

4. Найдите матрицы оператора A^{-1} в базисах e и f.

5. Найдите размерность ядра и образа оператора B.

6. Постройте ортонормированный базис ядра и образа оператора B.

7. Найдите собственные числа и собственные вектора операторов A и B.

8. Выпишите матрицы операторов A и B в базисе из собственных векторов.

Решение.

1. Из столбцов f_1, f_2, f_3 составим матрицу $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Векторa f_1, f_2, f_3 образуют базис в $\mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда матрица C обратима. Так как нам все равно придется вычислять обратную к C матрицу, то доказывать сейчас, что она существует (например считать определитель C), не обязательно. Для матрицы перехода выполнено соотношение $(e_1, e_2, e_3)C_{e\to f} = (f_1, f_2, f_3)$, т. е. составленная нами матрица C и есть $C_{e\to f}$. Матрица обратного перехода может быть получена исходя из соотношения $C_{f\to e} = C^{-1}_{e\to f}$. Найдем обратную к C матрицу методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

откуда $C_{f\to e} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Сначала найдем координаты вектора y в базисе e, а затем с помощью уже известной матрицы перехода $C_{f\to e}$ найдем его координаты в базисе f. Матрица композиции операторов $A \circ B$ в базисе e равна произведению матриц операторов A_e и B_e. Тогда

$$y_e = A_e B_e x_e = (15, 15, -75)^\mathsf{T} = 15(1, 1, -5)^\mathsf{T},$$

а $y_f = C_{f\to e} y_e = 15(-3, -4, 0)^\mathsf{T}$.

Ответ: $y_f = (-45, -60, 0)^\mathsf{T}$.

Замечание 1. При вычислении произведения $A_e B_e x_e$ выгоднее сначала умножить B_e на x_e, а потом A_e на результат предыдущей операции (посчитайте количество умножений!).

3. Оператор обратим тогда и только тогда, когда его матрица (в любом базисе) обратима, т. е. ее определитель не равен 0.

$$\det A_e = 13 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -25 & 13 \end{vmatrix} - (-15) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -25 \end{vmatrix} = 224.$$

в то время как $\det B_e = 0$, так как две последние строки матрицы B_e одинаковы.

Ответ: A – обратим, B – нет.

4. В предыдущем пункте мы выяснили, что оператор A обратим. Матрица обратного оператора A^{-1} в базисе e является обратной к A_e. В данном случае целесообразно разыскивать обратную матрицу с помощью алгебраических дополнений. Получаем

$$A_e^{-1} = \frac{1}{224}\begin{pmatrix} -16 & 120 & -24 \\ -44 & 148 & -24 \\ -76 & 220 & -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -4 & 30 & -6 \\ -11 & 37 & -6 \\ -19 & 55 & -4 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти матрицу оператора A^{-1} в базисе f, воспользуемся формулой 3.5, связывающей матрицы оператора в различных базисах:

$$A_f^{-1} = C_{f\to e}A_e^{-1}C_{e\to f} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 30 & -6 \\ -11 & 37 & -6 \\ -19 & 55 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 104 & -120 & -33 \\ 72 & -82 & -25 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Можно, конечно, сначала найти матрицу оператора A в базисе f, а затем искать обратную к ней.

Замечание 2. Для вычисления определителя мы воспользовались формулой разложения по столбцу, а для нахождении обратной матрицы – алгебраическими дополнениями, потому что матрица A_e неудобна для ручного счета методом Гаусса (нет ни одной единицы, с помощью которой можно было бы легко получить нули). Для матриц 2×2 или 3×3 количество вычислений при таком подходе ненамного больше, чем при использовании метода Гаусса. Однако **никогда** не пользуйтесь такого рода вычислениями для матриц более высокого порядка!

5. Поскольку образ оператора умножения на матрицу есть линейная оболочка столбцов матрицы, то задача отыскания размерности $\operatorname{Im} B$ сводится к нахождению ранга матрицы B_e. Вычисления показывают, что $\dim \operatorname{Im} B = \operatorname{rank} B_e = 2$. Сумма размерностей ядра и образа линейного оператора равна размерности пространства, в котором он действует. Так как оператор B действует в $\mathbb{R}^3$, то $\dim \operatorname{Ker} B = 1$.

6. Осуществляя элементарные преобразования над столбцами матрицы B_e, также как и в задаче 1 найдем базис образа оператора B:

$$B_e = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 10 \\ -3 & -18 & 16 \\ -3 & -18 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -3 & 12 & 10 \\ -3 & 12 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $g_1 = (0,1,1)^\mathsf{T}$, $g_2 = (-5,-3,-3)^\mathsf{T}$. Ортогонализуя столбцы g_1, g_2, положим $h_1 = g_1$ и $h_2 = g_2 - \frac{(g_2,h_1)}{(h_1,h_1)} h_1 = (-5,0,0)^\mathsf{T}$ (мы намеренно изменили естественный порядок столбцов g_1 и g_2, чтобы упростить вычисления). Осталось нормировать вектора h_1 и h_2. По формуле $v_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}$ получаем: ортонормированный базис образа оператора B состоит из векторов $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^\mathsf{T}$ и $v_2 = (-1,0,0)^\mathsf{T}$.

Ядро оператора B по определению есть пространство решений однородной системы $B_e x = 0$. Решим эту систему методом Гаусса. Найдем вектор $(2,5,6)^\mathsf{T}$, образующий базис ядра (см. задачу 2). Так как он один, то ортогонализовывать нечего. Нормируем его. Окончательно, ортонормированный базис $\operatorname{Ker} B$ состоит из одного вектора $\frac{1}{\sqrt{65}}(2,5,6)^\mathsf{T}$.

7. Составим характеристический многочлен оператора A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -15 & 3 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 7 & -25 & 13-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 19\lambda^2 - 116\lambda + 224.$$

Попробуем найти рациональные корни этого многочлена. Так как старший коэффициент многочлена χ_A равен -1, то рациональные корни являются целыми делителями свободного члена $224 = 2^5 \cdot 7$ (данное задание составлено так, что характеристический многочлен имеет целые корни, иначе пришлось бы задействовать приближенные вычисления или материал, не входящий в программу). Нетрудно заметить, что отрицательные числа не могут быть корнями многочлена χ_A. Проверив по очереди положительные делители числа 224, находим корень $\lambda_1 = 4$. Разделив $\chi_A(\lambda)$ на $\lambda - 4$ получаем $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 4)(-\lambda^2 + 15\lambda - 56)$, откуда находим остальные корни: $\lambda_2 = 7$ и $\lambda_3 = 8$.

Замечание 3. На самом деле подстановку числа в многочлен лучше производить по схеме Горнера, пользуясь тем фактом, что $p(\alpha)$ равно остатку от деления $p(t)$ на $(t - \alpha)$. При таком подходе разложение многочлена на множители получается автоматически, как только найден его корень. Кроме существенного сокращения вычислений, схема Горнера имеет еще одно преимущество – ее очень легко программировать.

Собственные числа – это корни характеристического многочлена. Значит, оператор A имеет три собственных числа: $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 7$ и $\lambda_3 = 7$. Собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ, представляет собой пространство решений однородной системы $(A - \lambda E)x = 0$. Решим эту систему для каждого собственного числа.

a) $\lambda_1 = 4$: $\begin{pmatrix} 9 & -15 & 3 \\ 5 & -11 & 3 \\ 7 & -25 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \alpha,$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\lambda_2 = 7$: $\begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 5 & -14 & 3 \\ 7 & -25 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \alpha,$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\lambda_3 = 8$: $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 3 \\ 5 & -15 & 3 \\ 7 & -25 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \alpha,$

где $\alpha \in \mathbb{R}$.

По определению, собственные вектора – это ненулевые элементы собственного подпространства, поэтому в ответе учитываем, что $\alpha \neq 0$.

Вычисления для оператора B полностью аналогичны, поэтому они опущены.

Ответ: собственные числа оператора A: $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 7$; $\lambda_3 = 7$. Собственные вектора оператора A: $u_1 = (1, 1, 2)^\mathsf{T}\alpha$; $u_2 = (1, 1, 3)^\mathsf{T}\alpha$; $u_3 = (0, 1, 5)^\mathsf{T}\alpha$; где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Собственные числа оператора B: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = -2$; $\mu_3 = -5$.

Собственные вектора оператора B: $v_1 = (2, 5, 6)^\mathsf{T}\alpha$; $v_2 = (0, 1, 1)^\mathsf{T}\alpha$; $v_3 = (1, 1, 1)^\mathsf{T}\alpha$; где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Замечание 4. Так как определитель оператора B равен 0, а определитель любого оператора равен произведению собственных чисел (с учетом кратности), то оператор B гарантированно имеет собственное число 0. Поэтому вычисления его собственных чисел заведомо проще, чем для A.

8. Поскольку собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы, то наборы векторов $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2, v_3)$ являются базисами в пространстве $\mathbb{R}^3$. В базисе из собственных векторов матрица оператора диагональна, причем по диагонали стоят собственные числа, а их порядок соответствует порядку собственных векторов (в этом легко убедиться, воспользовавшись рассуждениями, приведенными в задаче 7, и определением собственного вектора 4.1).

Ответ: $A_u = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Квадратное матричное уравнение

Найти матрицу X с наибольшими собственными числами, удовлетворяющую уравнению

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим матрицу в правой части уравнения через B. Заметим, что $BX = XB$ (матрица X перестановочна с $X^2 - 4X$). Если бы матрица B была диагональной с различными числами на диагонали, то из условия перестановочности матрица X тоже должна была бы быть диагональной ($(BX)_{ij} = (XB)_{ij} \iff b_{ii}x_{ij} = x_{ij}b_{jj}$, откуда при $i \neq j$ имеем $x_{ij} = 0$, так как $b_{ii} \neq b_{jj}$). Для диагональных же матриц уравнение легко решается. Следовательно, для решения задачи достаточно найти базис, в котором матрица B диагональна. Такой базис (если он есть) является базисом из собственных векторов. Поэтому сначала мы ищем собственные числа и собственные вектора матрицы B (см. пп. 7 и 8 задачи 9).

Матрица B имеет три различных собственных числа: $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -3$ и $\lambda_3 = 5$. Им соответствуют собственные вектора $u_1 = (1,1,0)^\mathsf{T}$, $u_1 = (1,1,1)^\mathsf{T}$ и $u_1 = (0,1,1)^\mathsf{T}$. Итак, матрица B в базисе $u = (u_1, u_2, u_3)$ из собственных векторов имеет вид $B_u = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Выполнение исходного соотношения не зависит о выбора базиса, поэтому $X_u^2 - 4X_u = B_u$ и, как было отмечено выше, матрица X_u диагональна. Пусть $X_u = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$. Тогда для каждого $i = 1, 2, 3$ выполнено соотношение $\mu_i^2 - 4\mu_i = \lambda_i$. Находим $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ или 3, а $\mu_3 = -1$ или 5. Очевидно, что μ_i являются собственными числами матрицы X_u, а значит и матрицы X (собственные числа не зависят от выбора базиса). По условию необходимо выбрать наибольшие возможные μ_i, т. е. $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 3$, а $\mu_3 = 5$.

Теперь, когда мы нашли матрицу X_u, для нахождения $X = X_e$ надо найти матрицы перехода $C_{e\to u}$ и $C_{u\to e}$. Как обычно (см. п. 1 задачи 9), матрица перехода от стандартного базиса к базису u состоит из столбцов базиса u, а $C_{u\to e} = C_{e\to u}^{-1}$. После нахождения обратной матрицы методом Гаусса получаем:

$$C_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{u\to e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось воспользоваться формулой 3.5, связывающей матрицы в различных базисах. Получаем

$$X = X_e = C_{e\to u} X_u C_{u\to e} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. В случае, когда матрица B не диагонализуема, задачу можно решить при помощи жордановой формы матрицы (см. задачи 11 и 12). Если же B имеет кратные собственные числа, но по-прежнему диагонализуема, то квадратное уравнение имеет бесконечно много решений (например, уравнению $X^2 = E$ удовлетворяет *любая* матрица X с собственными числами ± 1). Несмотря на это, решение с наибольшими собственными числами по-прежнему единственно, а алгоритм его нахождения аналогичен вышеизложенному.

Задача 11. Жорданова форма матрицы 3×3

Найти жорданову форму и жорданов базис матриц:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$

2. $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -3 & 16 & 12 \\ 4 & -20 & -15 \end{pmatrix}.$

3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{pmatrix}.$

Алгоритм. Начинаем решение задачи с нахождения собственных чисел заданной матрицы D и вычисления ранга матрицы $D - \lambda E$ для каждого собственного числа λ. Так как собственное число удовлетворяет условию $\det(D - \lambda E) = 0$, а матрица D имеет размер 3×3, то ранг может быть равен 1 или 2 (ранг равен 0 только для нулевой матрицы, в этом случае $D = \lambda E$, что было бы видно сразу). Ранг матрицы равен 1 тогда и только тогда, когда все ее строки пропорциональны друг другу. Это также проверяется легко.

Обозначим через u жорданов базис матрицы D так, что D_u – ее жорданова форма. Ранг матрицы оператора не зависит от выбора базиса, а единичная матрица не меняется при замене базиса. Поэтому $\operatorname{rank}(D - \lambda E) = \operatorname{rank}(D_u - \lambda E)$. В трехмерном пространстве количество различных собственных чисел и ранги матриц $D - \lambda E$ однозначно определяют размеры жордановых клеток.

Существует всего три различные жордановы формы недиагонализуемой матрицы третьего порядка, с точностью до порядка расположения жордановых клеток:

$$\mathit{1.}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}; \qquad \mathit{2.}\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathit{3.}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

(если матрица диагонализуема, то задача сводится к нахождению собственных чисел и собственных векторов).

Если матрица третьего порядка имеет три различных собственных числа λ_1, λ_2, λ_3, то она диагонализуема (см. 4.11).

Если у матрицы D два различных собственных числа λ_1, λ_2, то возможны 2 варианта. Если $\operatorname{rank}(D - \lambda_2 E) = 1$, т. е. геометрическая кратность числа λ_2 равна двум (ранг – это размерность образа, а геометрическая кратность – размерность ядра оператора $D - \lambda_2 E$, по теореме 3.9 их сумма равна 3), то матрица диагонализуема по теореме 4.12. Если же $\operatorname{rank}(D - \lambda_2 E) = 2$, то жорданова форма имеет вид *1.* По формуле для столбцов матрицы оператора (см. 3.4) для векторов u_1, u_2, u_3 жорданова базиса выполнены равенства

$$(D - \lambda_1 E)u_1 = 0, \qquad (D - \lambda_2 E)u_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad (D - \lambda_2 E)u_3 = u_2.$$

Вектора u_1, u_2, u_3 в этом случае проще всего искать из выписанных выше систем линейных уравнений.

Наконец, пусть матрица имеет одно собственное число λ кратности 3. Если $\operatorname{rank}(D - \lambda E) = 1$, то жорданова форма имеет вид *2*, а для векторов жорданова базиса выполнены равенства

$$(D - \lambda E)u_1 = 0, \qquad (D - \lambda E)u_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad (D - \lambda E)u_3 = u_2.$$

Кроме того, легко проверить, что $(D_u - \lambda E)^2 = 0$, откуда следует, что $(D - \lambda E)^2 = 0$. В этом случае вычисление векторов u_1, u_2, u_3 проще всего провести следующим образом: берем произвольный вектор u_3 так, чтобы $(D-\lambda E)u_3 \neq 0$ (например, если первый столбец матрицы $D-\lambda E$ не равен нулю, то достаточно взять $u_3 = e_1$). Положим $u_2 = (D-\lambda E)u_3$ и заметим, что $(D-\lambda E)u_2 = (D-\lambda E)^2 u_3 = 0$. В качестве u_1 можно взять любой собственный вектор матрицы D не пропорциональный u_2.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда D имеет единственное собственное число алгебраической кратности 3 и геометрической кратности 1, т. е. $\operatorname{rank}(D-\lambda E) = 2$. В этом случае жорданова форма имеет вид (2), а для векторов жорданова базиса выполнены равенства

$$(D-\lambda E)u_1 = 0, \qquad (D-\lambda E)u_2 = u_1 \qquad \text{и} \qquad (D-\lambda E)u_3 = u_2.$$

При этом $(D_u - \lambda E)^3 = 0$, откуда $(D-\lambda E)^3 = 0$. Простейший способ нахождения векторов u_1, u_2, u_3 состоит в следующем. Выбираем произвольный вектор u_3. Вычисляем $u_2 = (D-\lambda E)u_3$ и $u_1 = (D-\lambda E)u_2$. Заметим, что $(D-\lambda E)u_1 = (D-\lambda E)^3 u_3 = 0$. Таким образом, если $u_1 \neq 0$, то задача решена. В противном случае, просто заменим u_3 на линейно независимый и повторим вычисления векторов u_2 и u_1. Даже если мы два раза получим $u_1 = 0$, то в третий раз нам обязательно повезет: матрица $(D-\lambda E)^2$ ненулевая, поэтому ядро оператора умножения на эту матрицу не совпадает со всем пространством и, следовательно, не может содержать 3 линейно независимых вектора.

Перейдем к решению конкретных задач.

Решение.

1. Матрица A имеет одно собственное число $\lambda = -1$. Матрица $A + E = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2. Поэтому жорданова форма $A_u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Положим $u_3 = (1,0,0)^\mathsf{T}$ и вычислим

$$u_2 = (A+E)u_3 = (3,-1,-2)^\mathsf{T} \qquad \text{и} \qquad u_1 = (A+E)u_2 = (2,-1,-1)^\mathsf{T}.$$

Ответ: жорданова форма матрицы: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
жорданов базис: $u_1 = (2,-1,-1)^\mathsf{T}$; $u_2 = (3,-1,-2)^\mathsf{T}$; $u_3 = (1,0,0)^\mathsf{T}$.

2. Матрица B также имеет одно собственное число $\lambda = 1$. Все строки матрицы $B - E = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -3 & 15 & 12 \\ 4 & -20 & -16 \end{pmatrix}$ пропорциональны, поэтому ее ранг равен 1. Положим $u_3 = (1,0,0)^\mathsf{T}$ и вычислим $u_2 = (B-E)u_3 = (1,-3,4)^\mathsf{T}$. Нетрудно убедиться, что $(B-E)u_2 = 0$, что и обещала нам теория. В качестве u_1 можно взять любое решение уравнения $(B-E)u_1 = 0$, не пропорциональное u_2. Это уравнение равносильно уравнению $(1,-5,-4)u_1 = 0$, поэтому можно взять например $u_1 = (5,1,0)^\mathsf{T}$.

Ответ: жорданова форма матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
жорданов базис: $u_1 = (5,1,0)^\mathsf{T}$; $u_2(1,-3,4)^\mathsf{T}$; $u_3 = (1,0,0)^\mathsf{T}$.

3. Матрица C имеет два собственных числа: $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -3$, кратности которых равны 1 и 2 соответственно. Решив соответствующие однородные системы линейных уравнений, найдем собственные вектора: $u_1 = (0,1,-1)^\mathsf{T}\alpha$ и $u_2 = (-2,0,1)^\mathsf{T}\beta$. При этом достаточно взять $\alpha = \beta = 1$. Геометрическая кратность λ_2 равна 1, поэтому матрица не диагонализуема. Следовательно, она имеет жорданову форму *1.* Для третьего вектора жорданова базиса выполнено равенство $(C+3E)u_3 = u_2$. Решаем эту систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -2 \\ -10 & -15 & -20 & 0 \\ 9 & 13 & 18 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Положив $\alpha = 0$, получим $u_3 = (3,-2,0)^\mathsf{T}$.

Ответ: жорданова форма матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;
жорданов базис: $u_1 = (0,1,-1)^\mathsf{T}$; $u_2 = (-2,0,1)^\mathsf{T}$; $u_3 = (3,-2,0)^\mathsf{T}$.

Задача 12. Жорданова форма нильпотентной матрицы 5×5

Найти жорданову форму и жорданов базис нильпотентной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 & 3 & -3 \\ -5 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -7 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм. Матрица A называется нильпотентной, если $A^k = 0$ для некоторого натурального k. Поэтому все пространство $\mathbb{C}^5$ является корневым подпространством $\operatorname{Ker} A^5$, соответствующим единственному собственному числу $\lambda = 0$. Приведем один из возможных алгоритмов нахождения жордановой формы и жорданова базиса матрицы $n \times n$. Количество вычислений по этому алгоритму в среднем имеет порядок n^3. Теоретическую основу алгоритма составляет утверждение о том, что объединение жордановых цепочек, вытянутых от линейно независимых собственных векторов, линейно независимо.

1. Возьмем произвольный вектор $e_1^0 \in \mathbb{C}^n$ и будем действовать на него оператором A, пока не получим 0, т. е. построим цепочку векторов $e_1^1 = Ae_1^0$, $e_1^2 = Ae_1^1, \ldots, e_1^{k_1} = Ae_1^{k_1-1}$, $Ae_1^{k_1} = 0$.

2. Предположим теперь, что уже построено $(m-1)$ такая цепочка, причем собственные вектора $e_1^{k_1}, \ldots, e_{m-1}^{k_{m-1}}$ линейно независимы. Если количество построенных векторов равно размерности пространства, то задача решена (см. 5.5). Если нет, переходим к следующему шагу.

3. Берем следующий произвольный вектор e_m^0 (хорошо, если он не будет лежать в линейной оболочке ранее найденных, однако проверка того, что это так, требует некоторого количества вычислений, которого хотелось бы избежать; для случайного вектора вероятность попасть в данное подпространство близка к нулю).

4. Построим цепочку, исходя из вектора e_m^0:

$$e_m^1 = Ae_m^0, \ldots, e_m^{k_m} = Ae_m^{k_m-1}, \qquad Ae_m^{k_m} = 0.$$

5. Если $e_m^{k_m}$ линейно независим с ранее найденными собственными векторами, переходим в начало шага *2.* Предположим, что набор $e_1^{k_1}, \ldots, e_m^{k_m}$ линейно зависим: $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i^{k_i} = 0$. Перенумеровываем цепочки так, чтобы длина последней цепочки была наименьшей среди всех, которые реально участвуют в линейной зависимости, т. е. $k_m \leqslant k_i$ для всех тех $i = 1, \ldots, m-1$, для которых $\alpha_i \neq 0$. Выражаем $e_m^{k_m}$ в виде линейной комбинации: $e_m^{k_m} = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \beta_i e_i^{k_i}$. Получаем $A^{k_m}(e_m^0) = A^{k_m}(v)$ для некоторого v, которое нетрудно найти из предыдущего равенства, представляя $e_i^{k_i}$ в виде $A^{k_i}(e_i^0)$.

6. Переобозначаем: $e_m^0 := e_m^0 - v$. Если новый e_m^0 оказался равным нулю, переходим к шагу *2*. В противном случае переходим к шагу *4*.

Описанный процесс с гарантией оборвется, если перебрать все вектора из какого-нибудь базиса пространства $\mathbb{C}^n$, например стандартного. Алгоритм выглядит запутанным и требующим большого количества вычислений, но на самом деле с большой вероятностью вычислений очень немного. В примере, который разбирается ниже, случайные вектора намеренно выбраны так, чтобы проиллюстрировать, как работает *весь* алгоритм, даже при неудачном выборе векторов.

Решение. По виду заданной матрицы A легко заметить, что сумма второго и четвертого ее столбцов имеет 3 нулевые координаты, что немного упростит вычисления. Поэтому на первом шаге удобно выбрать вектор $e_1^0 = (0, 1, 0, 1, 0)^\mathsf{T}$. Тогда

$$e_1^1 = Ae_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1^2 = Ae_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Ae_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как построено всего 3 вектора в 5-мерном пространстве, переходим к шагу *3*. Пусть $e_2^0 = (1, 1, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$. На четвертом шаге вычисляем:

$$e_2^1 = Ae_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad e_2^2 = Ae_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Перейдя к шагу *5*, получаем $e_2^2 = -2e_1^2$, откуда $A^2(e_2^0) = A^2(-2e_1^0)$. Следовательно, на шестом шаге переобозначаем:

$$e_2^0 := e_2^0 + 2e_1^0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\\0\end{pmatrix},$$

и далее, перейдя к шагу *4*,

$$e_2^1 := e_2^1 + 2e_1^1 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\-7\\-5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-5\\-5\end{pmatrix}.$$

Снова перейдя к шагу *5* получаем $e_2^1 = \frac{5}{3}e_1^2$, откуда $A(e_2^0) = A(\frac{5}{3}e_1^1)$. На шестом шаге еще раз переобозначаем $e_2^0 := e_2^0 - \frac{5}{3}e_1^1 = (1, 3, -5/3, 1/3, 0)$ так, что $A(e_2^0) = 0$, и шаг *4*, к которому мы переходим, так как $e_2^0 \neq 0$, оказывается пустым. Так как e_2^0 и e_1^2 линейно независимы, то от первой фразы шага *5* переходим к шагу *2*. Так как построено еще только 4 вектора, переходим к шагу *3*, на котором выбираем $e_3^0 = (1, 0, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$. На четвертом шаге вычисляем

$$e_3^1 = A(e_3^0) = \begin{pmatrix}1\\3\\-5\\-4\\-1\end{pmatrix}, \quad e_3^2 = A(e_3^1) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\10\\10\end{pmatrix} = -\frac{10}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\\-3\end{pmatrix}.$$

На шаге *5* получаем $e_3^2 = -\frac{10}{3}e_1^2$, откуда $A^2(e_3^0) = A^2(-\frac{10}{3}e_1^0)$. На шаге *6* переобозначаем:

$$e_3^0 := e_3^0 + \frac{10}{3}e_1^0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{10}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\10\\0\\10\\0\end{pmatrix},$$

и далее, перейдя к шагу 4, $e_3^1 := e_3^1 + \frac{10}{3}e_1^1 = \frac{1}{3}(3, 9, -5, -2, -3)^\mathsf{T}$. Перейдя к шагу *5*, выясняем, что собственный вектор e_3^1 не может быть линейно независим с собственными векторами e_1^2 и e_2^0, полученными на предыдущих шагах, иначе шесть полученных векторов были бы линейно независимы, что невозможно в 5-мерном пространстве. С другой стороны, e_3^1 и e_1^2 линейно независимы (не пропорциональны), поэтому e_2^0 обязан представляться в виде их линейной комбинации: $e_2^0 = \alpha e_1^2 + \beta e_3^1$ (в данном случае находить конкретные α и β не обязательно). Переобозначаем $e_2^0 := e_2^0 - \alpha e_1^2 - \beta e_3^1 = 0$. Поэтому от шага *6* возвращаемся к шагу *2*.

К настоящему моменту найдены пять векторов: e_1^0, e_1^1, e_1^2, e_3^0 и e_3^1. Поэтому нахождение жорданова базиса закончено. Жордановы клетки в жордановой форме соответствуют жордановым цепочкам, поэтому жорданова форма матрицы A состоит из двух клеток размеров 3 и 2. Осталось расположить вектора в правильном порядке: $u_1 = e_1^2$, $u_2 = e_1^1$, $u_3 = e_1^0$, $u_4 = e_3^1$ и $u_5 = e_3^0$.

Ответ: жорданова форма матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
жорданов базис: $u_1 = (0,0,0,-3,-3)^\mathsf{T}$; $u_2 = (0,0,1,1,0)^\mathsf{T}$;
$u_3 = (0,1,0,1,0)^\mathsf{T}$; $u_4 = (3,9,-5,-2,-3)^\mathsf{T}$; $u_5 = (3,10,0,10,0)^\mathsf{T}$.

Замечание 1. Обратите внимание, что нумерация корневых векторов в нашем решении не совпадает (точнее, прямо противоположно) нумерации введенной в определении жордановой цепочки (см. 5.5). Это происходит потому, что мы стартуем не с собственного вектора, а с корневого вектора наибольшей высоты и до вычислений не знаем, какова его высота.

Замечание 2. В приведенном решении нам сильно не повезло: если бы мы сразу взяли $e_2^0 = (1,0,0,0,0)^\mathsf{T}$, то избежали бы всех вычислений, связанных с вектором $e_2^0 = (1,1,0,0,0)^\mathsf{T}$, которые в итоге оказались лишними. Как уже отмечалось, вероятность такого невезения при *случайном* выборе векторов e_i^0 близка к нулю.

Задача 13. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Преобразованием, не меняющим расстояний, привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $14x^2 - 7y^2 + 20xy + 8x + 34y = 35$. Найти координаты ее фокусов в исходной системе координат.

Решение. Запишем уравнение данной кривой в матричной форме:

$$v^\mathsf{T} B v + 2av = p\,,$$

где $v = v_e = (x, y)^\mathsf{T}$, $B = Q_e = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной формы $Q(v) = 14x^2 - 7y^2 + 20xy$ в стандартном базисе e (см. 6.8), $a = (4, 17)$ – матрица линейного функционала $L(v) = 4x + 17y$ в базисе e, а $p = 35$.

Сначала уничтожим, с помощью подходящей замены базиса, слагаемое, содержащее произведение переменных. Для этого необходимо привести квадратичную форму Q к диагональному виду. Так как требуется не менять расстояний между точками, необходимо использовать ортогональное преобразование координат. Найдем ортонормированный базис из собственных векторов, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид (существование такого базиса следует из теоремы 6.11).

Матрица B имеет два различных собственных числа: $\lambda_1 = 18$ и $\lambda_2 = -11$. Столбец $u_1 = (5, 2)^\mathsf{T}\alpha$ является собственным вектором, отвечающим собственному числу 18, а $u_2 = (-2, 5)^\mathsf{T}\beta$ – собственным вектором, отвечающим собственному числу -11 ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Нормируем базис из собственных векторов положив $\alpha = \frac{1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}$ и $\beta = \frac{1}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}$. Матрица квадратичной формы Q в ортонормированном базисе u из собственных векторов является диагональной с собственными числами по диагонали: $Q_u = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$. Матрица перехода $C_{e\to u} = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ является ортогональной.

Обозначим $v_u = (x', y')^\mathsf{T}$ и запишем исходное уравнение в новых координатах. По формуле преобразования координат при замене базиса $v = v_e = C_{e\to u} v_u$ или, в координатах,

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{\sqrt{29}}\,x' - \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,y' \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,x' + \dfrac{5}{\sqrt{29}}\,y' \end{cases}$$

Подставив это в исходное уравнение, имеем

$$(C_{e\to u} v_u)^\mathsf{T} B (C_{e\to u} v_u) + a C_{e\to u} v_u = p \iff v_u^\mathsf{T} B_u v_u + a C_{e\to u} v_u = p\,,$$

или, в числовой записи,

$$18{x'}^2 - 11{y'}^2 + \frac{1}{\sqrt{29}}(108x' + 154y') = 35.$$

Теперь избавимся от линейных слагаемых с помощью сдвига начала координат. Для этого выделим полные квадраты:

$18x'^2+\frac{108}{\sqrt{29}}x' = 18\left(x'^2+\frac{6}{\sqrt{29}}x'\right) = 18\left(\left(x'+\frac{3}{\sqrt{29}}\right)^2-\frac{9}{29}\right) = 18x''^2-\frac{162}{29}$ и

$-11y'^2+\frac{154}{\sqrt{29}}y' = -11\left(y'^2-\frac{14}{\sqrt{29}}y'\right) = -11\left(\left(y'-\frac{7}{\sqrt{29}}\right)^2-\frac{49}{29}\right) = -11y''^2+\frac{539}{29}$,

где $x'' = x'+\frac{3}{\sqrt{29}}$, а $y'' = y'-\frac{7}{\sqrt{29}}$.

Таким образом, уравнение преобразуется к виду $18x''^2-\frac{162}{29}-11y''^2+\frac{539}{29} = 35$ или $18x''^2-11y''^2 = 22$. Разделив на 22, получим канонический вид уравнения:

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{11}/3\right)^2}-\frac{y''^2}{\sqrt{2}} = 1.$$

Это гипербола с полуосями $a = \sqrt{11}/3$ и $b = \sqrt{2}$. Фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{29}/3$. Следовательно, координаты фокусов гиперболы в новой системе координат: $\left(\pm\sqrt{29}/3,\ 0\right)$. Используя формулы, связывающие (x'', y''), (x', y') и (x, y), строим следующую таблицу:

	x''	y''	x'	y'	x	y
F_1	$\sqrt{29}/3$	0	$20/3\sqrt{29}$	$7/\sqrt{29}$	$2/3$	$5/3$
F_2	$-\sqrt{29}/3$	0	$-38/3\sqrt{29}$	$7/\sqrt{29}$	$-8/3$	$1/3$

Ответ: Канонический вид уравнения: $\frac{x''^2}{\left(\sqrt{11}/3\right)^2}-\frac{y''^2}{\sqrt{2}} = 1$. Фокусы: $F_1(2/3, 5/3)$ и $F_2(-8/3, 1/3)$.

Замечание 1. Приведенный алгоритм решения может быть использован также для приведения к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка.

Замечание 2. Для квадратичной формы в евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна. Если все собственные числа матрицы квадратичной формы различны, то собственные вектора, отвечающие различным собственным числам, будут попарно ортогональны и Вам останется только нормировать базисные вектора. В противном случае, нужно применить процесс ортогонализации только к базисным векторам, взятым из одного и того же собственного подпространства, поскольку собственные подпространства симметричной матрицы попарно ортогональны.

Задача 14. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Определить тип поверхности второго порядка

$$2x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 10xy - 2xz - 12yz + 2x - 6y - 2z = 1$$

и найти координаты вершины поверхности в исходной системе координат.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $Q(v) + L(v) = p$, где $v = v_e = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$, $Q(v) = 2x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 10xy - 2xz - 12yz$ – квадратичная форма, а $L(v) = 2x - 6y - 2z$ – линейный функционал. Сначала уничтожим с помощью подходящей замены базиса слагаемые, содержащие произведения переменных. Для этого приведем квадратичную форму Q к диагональному виду методом выделения полных квадратов. Согласно теореме 6.10, всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования может быть приведена к диагональному виду. Заметим, что в данном случае, перед нами не стоит задача нахождения прямоугольной системы координат, в которой уравнение поверхности имело бы канонический вид, а следовательно, используемое линейное преобразование не обязано быть ортогональным. Выделим в квадратичной форме все слагаемые, содержащие переменную x, и преобразуем выделенную сумму так, чтобы все члены с x вошли в квадрат линейного выражения:

$$\begin{aligned}
Q(v) &= (2x^2 - 10xy - 2xz) - 4y^2 - 4z^2 - 12yz = \\
&= 2\left(x^2 - 2\left(\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z\right) + \left(\frac{5}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2\right) - \\
&- 2\left(\frac{25}{4}y^2 + \frac{5}{2}yz + \frac{1}{4}z^2\right) - 4y^2 - 4z^2 - 12yz = \\
&= 2\left(x - \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{33}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2 - 17yz.
\end{aligned}$$

Далее, группируем слагаемые, содержащие только переменную y, и выделяем в этой группе полный квадрат:

$$\begin{aligned}
Q(v) &= 2\left(x - \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{33}{2}\left(y^2 + 2\frac{17}{33}yz + \frac{289}{1089}z^2\right) + \frac{289}{66}z^2 - \frac{9}{2}z^2 = \\
&= 2\left(x - \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{33}{2}\left(y + \frac{17}{33}z\right)^2 - \frac{4}{33}z^2.
\end{aligned}$$

При помощи невырожденного линейного преобразования

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{5}{2}\, y - \dfrac{1}{2}\, z \\ y' = \qquad\quad y + \dfrac{17}{33}\, z \\ z' = \qquad\qquad\qquad z \end{cases}$$

квадратичная форма приводится к виду $Q(v') = 2x'^2 - \frac{33}{2}y'^2 - \frac{4}{33}z'^2$, где $v_u = (x', y', z')^\mathsf{T}$ – столбец координат в новом базисе u. Для того чтобы записать уравнение поверхности в новой системе координат, нам нужны формулы обратного линейного преобразования. Выразим старые координаты (x, y, z) через новые (x', y', z'):

$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{5}{2}\, y' - \dfrac{26}{33}\, z' \\ y = \qquad\quad y' - \dfrac{17}{33}\, z' \\ z = \qquad\qquad\qquad z'. \end{cases}$$

Уравнение поверхности в новой системе координат примет вид

$$2x'^2 - \frac{33}{2}y'^2 - \frac{4}{33}z'^2 + 2x' - y' - \frac{16}{33}z' = 1.$$

Теперь избавимся от линейных слагаемых с помощью переноса начала координат. Для этого выделим полные квадраты по всем переменным:

$$2x'^2 + 2x' = 2\left(x'^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x' + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 2\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2x''^2 - \frac{1}{2},$$

$$-\frac{33}{2}y'^2 - y' = -\frac{33}{2}\left(y'^2 + 2 \cdot \frac{1}{33} \cdot y' + \frac{1}{1089}\right) + \frac{1}{66} =$$

$$= -\frac{33}{2}\left(y' + \frac{1}{33}\right)^2 + \frac{1}{66} = -\frac{33}{2}y''^2 + \frac{1}{66},$$

$$-\frac{4}{33}z'^2 - \frac{16}{33}z' = -\frac{4}{33}\left(z'^2 + 4z' + 4\right) + \frac{16}{33} =$$

$$= -\frac{4}{33}\left(z' + 2\right)^2 + \frac{16}{33} = -\frac{4}{33}z''^2 + \frac{16}{33},$$

где $\quad x'' = x' + \dfrac{1}{2}, \qquad y'' = y' + \dfrac{1}{33}, \qquad z'' = z' + 2.$

Таким образом, уравнение преобразуется к виду

$$2x''^2 - \frac{33}{2}y''^2 - \frac{4}{33}z''^2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{66} - \frac{16}{33}$$

или

$$2x''^2 - \frac{33}{2}y''^2 - \frac{4}{33}z''^2 = 1.$$

Значит, поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид. Найдем формулы результирующего линейного преобразования:

$$\begin{cases} x = x'' + \frac{5}{2}\,y'' - \frac{26}{33}\,z'' + \ 1 \\ y = \qquad\quad\ y'' - \frac{17}{33}\,z'' + \ 1 \\ z = \qquad\qquad\qquad\quad z'' - 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что вершина O нашей поверхности, является началом координат в новой системе координат. Поэтому в исходной системе она имеет координаты $O(1, 1, -2)$.

Ответ: Двуполостный гиперболоид: $2x''^2 - \frac{33}{2}y''^2 - \frac{4}{33}z''^2 = 1$. Вершина поверхности: $O(1, 1, -2)$.

Замечание 1. Уравнение поверхности может не содержать членов с квадратом переменной, например: $xy = z$. С целью получить квадрат какой-нибудь переменной делаем преобразование $\begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y'. \\ z = z' \end{cases}$ В результате получаем уравнение гиперболического параболоида $x'^2 - y'^2 = z'$.

Замечание 2. Если поверхность имеет единственный центр симметрии (эллипсоид, конус, гиперболоиды) или прямую центров (эллиптический и гиперболический цилиндры), то прежде, чем приводить квадратичную форму $Q(v)$ к диагональному виду методом выделения полных квадратов, можно сначала уничтожить линейные члены уравнения с помощью переноса начала координат в точку, являющуюся центром симметрии. Если уравнение поверхности задать в матричной форме

$$v^{\mathsf{T}}Qv + 2av = p,$$

то координаты центра симметрии определяются из уравнения

$$Qv = -a^{\mathsf{T}},$$

где Q – матрица квадратичной формы $Q(v)$, а a – матрица линейного функционала $L(v)$ в исходном базисе. В случае же поверхностей, центра не имеющих (параболоиды), система окажется несовместной и следует сразу воспользоваться методом выделения полных квадратов.

Содержание