ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

А.В.СТЕПАНОВ

Содержание

1. Полилинейные отображения

Определение 1.1. Отображение $F : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m \text{ раз}} \to \mathbb{R}$ называется *полилинейной* (*m-линейной*) *формой*, если оно линейно по каждому аргументу, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены следующие равенства

$$F(\dots, a+b, \dots) = F(\dots, a, \dots) + F(\dots, b, \dots),$$
$$F(\dots, \lambda a, \dots) = \lambda F(\dots, a, \dots)$$

Обозначим через $e^{(i)}$ столбец с 1 на i-ом месте и остальными нулями. Ясно, что любой столбец $a \in \mathbb{R}^n$ раскладывается в линейную комбинацию $a = \sum_{i=1}^n a_i e^{(i)}$. Из этого замечания и полилинейности формы F вытекает следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если F – m-линейная форма на $\mathbb{R}^n$, то*

$$F(a^{(1)}, \dots, a^{(m)}) = \sum_{i_1, \dots, i_m = 1}^{n} F(e^{(i_1)}, \dots, e^{(i_n)})\, a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_n}^{(n)}.$$

2. Перестановки

Определение 2.1. *Перестановкой* на множестве X называется биективная функция из X в X. Множество всех перестановок на множестве $\{1, \dots, n\}$ обозначается через S_n. Перестановка σ называется *транспозицией*, если $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ для некоторых $i \neq j \in X$, а $\sigma(k) = k$ для всех $k \in X$, отличных от i и j.

Лемма-Определение 2.2. *Любая перестановка раскладывается в композицию транспозиций (многими разными способами).*

Четность числа транспозиций для данной перестановки σ не зависит от выбора разложения. Она называется четностью *перестановки σ и обозначается через $\varepsilon(\sigma)$. Точнее, если число транспозиций четно, то σ называется четной перестановкой, а $\varepsilon(\sigma) = 0$; в противном случае, σ называется нечетной, а $\varepsilon(\sigma) = 1$.*

Определение 2.3. Перестановки σ и τ из S_n называются взаимно обратными, если их композиция в любом порядке дает тождественную перестановку. Другими словами, если $\sigma(i) = j$, то $\tau(j) = i$, и наоборот. При этом пишут $\tau = \sigma^{-1}$ и $\sigma = \tau^{-1}$.

Последние исправления: 28 марта 2004 г.

Лемма 2.4. *Любая транспозиция обратна самой себе.*
Если $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_k$, то $\sigma^{-1} = \sigma_k^{-1} \circ \ldots \circ \sigma_1^{-1}$.
Перестановки σ и σ^{-1} имеют одинаковую четность.

3. Определение и формула для вычисления определителя

Определение 3.1. n-Линейная форма F называется антисимметричной, если для любых i, k и любого набора столбцов $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$

$$F(a^{(1)}, \ldots, a^{(i-1)}, a^{(i)}, a^{(i+1)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(k)}, a^{(k+1)} \ldots, a^{(n)}) = \\ = -F(a^{(1)}, \ldots, a^{(i-1)}, a^{(k)}, a^{(i+1)}, \ldots, a^{(k-1)}, a^{(i)}, a^{(k+1)} \ldots, a^{(n)})$$

т.е. при транспозиции аргументов значение формы меняет знак.

Лемма 3.2. *Если F – антисимметричная форма, и $a^{(i)} = a^{(j)}$ при $i \neq j$, то $F(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) = 0$.*

Определение 3.3. Определитем (n-ого порядка) называется n-линейная антисимметричная форма $\det$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\det(e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}) = 1$.

Матрица отождествляется со строкой, составленной из ее столбцов. Таким образом, определитель квадратной матрицы – это значение определенной выше формы на наборе столбцов этой матрицы.

Замечание. Для неквадратных матриц определитель не определен.

Теорема 3.4. *Для заданного n форма, определенная в 3.3 существует и единственна. При этом выполнена следующая формула:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

где A – матрица размера $n \times n$, а $\varepsilon(\sigma)$ – четность перестановки σ.

Доказательство. По теореме 1.2

$$\det A = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} \det(e^{(i_1)}, \ldots, e^{(i_n)}) a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}.$$

По лемме 3.2 и потому, что количество столбцов равно их высоте, в этой сумме остаются только те слагаемые, для которых $(i_1, \ldots, i_n)$ является перестановкой индексов $1, \ldots, n$. При этом, засчет антисимметричности, $\det(e^{(i_1)}, \ldots, e^{(i_n)})$ равен $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} \det E$, а $\det E = 1$ по определению. Это доказывает единственность.

Для проверки существования формы $\det$ достаточно проверить, что выведенная формула действительно задает полилинейную антисимметричную форму, значение которой на единичной матрице равно 1. Оставим эту проверку читателю в качестве упражнения. □

Следствие 3.5. *Если F – n-линейная антисимметричная форма на $\mathbb{R}^n$, то $F(A) = F(E) \cdot \det A$ для любой матрицы A размера $n \times n$.*

Доказательство. Доказательство повторяет первый абзац доказательства предыдущей теоремы с очевидными изменениями. □

4. Свойства определителя

Свойство 4.1. $\det A = \det A^T$. *Поэтому все свойства, сформулированные для столбцов матрицы A верны и для ее строк.*

Доказательство. Действительно, по теореме 3.4,

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Переставив сомножители $a_{\sigma(1),1},\dots,a_{\sigma(n),n}$ в соответствии с перестановкой σ^{-1} получим:

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}a_{\sigma(\sigma^{-1}(1)),\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{\sigma(\sigma^{-1}(n)),\sigma^{-1}(n)} = \\ = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

По лемме 2.4 $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})$. С другой стороны, отображение $S_n\to S_n$, заданное правилом $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$, биективно (оно обратно самому себе). Поэтому в последней сумме σ^{-1} пробегает все множество S_n. Таким образом,

$$\det A^T = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma^{-1})}a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

А это совпадает с формулой для $\det A$ из теоремы 3.4 с точностью до обозначения индекса суммирования. □

Свойство 4.2. *Если a и b – столбцы высоты n, то* $\det(\dots,a+b,\dots)=\det(\dots,a,\dots)+\det(\dots,b,\dots)$.

Общий множитель столбца выносится за знак определителя.

Аналогичные свойства выполнены, если слово "столбец" заменить на слово "строка".

Свойство 4.3. *Определитель матрицы с нулевым столбцом (строкой) равен нулю.*

Свойство 4.4. *При транспозиции столбцов (строк) матрицы ее определитель меняет знак.*

Определитель матрицы, в которой есть два одинаковых столбца (строки), равен нулю.

Свойство 4.5. *При первом преобразовании Гаусса со столбцами (строками) матрицы определитель не меняется (напомним, что первое преобразование Гаусса – это прибавление к столбцу матрицы другого столбца, умноженного на число, или аналогичное преобразование со строками).*

Доказательство. Пусть a и b – столбцы, а $\lambda\in\mathbb{R}$. Тогда по свойствам 4.2 и 4.4 получим

$$\det(\dots,a,\dots,b+\lambda a,\dots)=\det(\dots,a,\dots,b,\dots)+ \\ +\lambda\det(\dots,a,\dots,a,\dots)=\det(\dots,a,\dots,b,\dots)$$

□

Свойство 4.6 (определитель клеточно-треугольной матрицы)**.**
Определитель клеточно-треугольной матрицы равен произведению определителей диагональных блоков. В частности, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Доказательство. Пусть сначала $A=\begin{pmatrix}E & * \\ 0 & E\end{pmatrix}$. Так как эта матрица легко получается из единичной с помощью серии первых преобразований Гаусса, то ее определитель равен 1.

Рассмотрим теперь n-форму F на $\mathbb{R}^n$, сопоставляющую квадратной матрице B число $F(B)=\det\begin{pmatrix}B & * \\ 0 & E\end{pmatrix}$. Легко проверить, что F – полилинейная антисимметричная форма. По следствию 3.5 $F(B)=\det B\cdot F(E)$, что равно $\det B$ в соответствии с первым абзацем доказательства. Из свойства 4.1 легко вывести теперь, что $\det\begin{pmatrix}B & 0 \\ * & E\end{pmatrix}$ также равен $\det B$.

В качестве следующего шага доказательства зафиксируем квадратную матрицу B и рассмотрим m-форму G на $\mathbb{R}^m$, заданную формулой $G(C)=\det\begin{pmatrix}B & 0 \\ * & C\end{pmatrix}$, где C – квадратная матрица $m\times m$. Снова очевидно, что F – полилинейная антисимметричная форма, и по следствию 3.5 $G(C)=\det C\cdot G(E)$, а $G(E)=\det B$ по предыдущему абзацу доказательства.

Наконец, пусть

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & A^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Докажем индукцией по k, что $\det A = \det A^{(1)} \cdots \det A^{(k)}$. При $k = 1$ доказывать нечего. При $k > 1$ обозначим $C = A^{(k)}$ и

$$B = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & A^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

По индукционному предположению $\det B = \det A^{(1)} \cdots \det A^{(k-1)}$, а по предыдущему абзацу доказательства $\det A = \det B \cdot \det C = \det A^{(1)} \cdots \det A^{(k)}$.

Таким образом, свойство доказано для нижних клеточно-треугольных матриц. Доказательство для верхних клеточно-треугольных матриц легко следует теперь из свойства 4.1. $\square$

Определение 4.7. Пусть B – матрица размера $n \times n$, а i и j – индексы от 1 до n. Обозначим через $M^{(ij)}$ или $M^{(ij)}(B)$ матрицу, полученную из B вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца. *Алгебраическим дополнением* элемента матрицы B, стоящего в позиции (i, j), называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M^{(ij)}$. В том случае, когда хочется явно указать, для какой матрицы вычисляется алгебраическое дополнение, его обозначают через $A_{ij}(B)$.

Свойство 4.8 (разложение по столбцу (строке))**.** *Пусть A – матрица размера $n \times n$, а j – индекс от 1 до n. Тогда*

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} A_{ji} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_{ij}.$$

Доказательство. Пусть сначала $j = 1$. Первый столбец матрицы B раскладывается в сумму $\sum_{i=1}^{n} b_{i1} e^{(i)}$. По свойству 4.2

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n} \\ b_{nn} & b_{nn} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

По свойству 4.6 первый определитель из суммы равен $b_{11} A_{11}(B)$. Для вычисления i-ого слагаемого последней суммы переставим i-ую строку на первое место так, чтобы порядок следования остальных строк не изменился. Очевидно, это можно сделать с помощью $i - 1$ транспозиций строк. По свойству 4.4 получим

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{i-1,2} & \cdots & b_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ 0 & b_{i+1,2} & \cdots & b_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{i-1,2} & \cdots & b_{i-1,n} \\ 0 & b_{i+1,2} & \cdots & b_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{1n} \end{vmatrix},$$

что по свойству 4.6 равно $b_{i1} A_{i1}(B)$. Таким образом, мы доказали разложение определителя по первому столбцу.

Для доказательства разложения по j-ому столбцу переставим его на первое место так, чтобы порядок следования остальных столбцов не изменился, и воспользуемся свойством 4.4 и уже доказанным разложением по первому столбцу. Разложение по строке легко вывести из разложения по столбцу при помощи свойства 4.1. $\square$

Свойство 4.9. *Сумма произведений элементов столбца (строки) матрицы на алгебраические дополнения другого столбца (строки) равна нулю. Точнее, если $j \neq k$, то*

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} A_{ki} = 0$$

Доказательство. Заменим k-ый столбец матрицы B на j-ый, оставив все остальное без изменений, т.е. рассмотрим матрицу $\tilde{B}$ с элементами $\tilde{b}_{im} = b_{im}$ при $m \neq k$ и $\tilde{b}_{ik} = b_{ij}$. В полученной матрице будет два одинаковых столбца, и по свойству 4.4 ее определитель будет равен нулю. С другой стороны, заметим, что алгебраические дополнения элементов k-ого столбца не зависят от элементов этого столбца, поэтому $A_{ik}(\tilde{B}) = A_{ik}(B)$. Раскладывая, по свойству 4.8, определитель матрицы $\tilde{B}$ по k-ому столбцу, получим $0 = \det \tilde{B} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_{ik}$.

Доказательство второго равенства (для строк) совершенно аналогично. □

Свойство 4.10. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.*

Доказательство. Зафиксируем матрицу A размера $n \times n$ и рассмотрим функцию $F : \mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, заданную формулой $F(B) = \det(AB)$ (мы по-прежнему отождествляем матрицу со строкой из ее столбцов). Пусть $b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}$ – столбцы матрицы B. Тогда $Ab^{(1)}, \ldots, Ab^{(n)}$ будут столбцами матрицы AB. Из этого легко вывести, что F является n-линейной формой на $\mathbb{R}^n$. Тогда по следствию 3.5 $\det(AB) = F(B) = F(E) \cdot \det(B) = \det A \cdot \det B$. □

5. Формула для элементов обратной матрицы и формулы Крамера

Определение 5.1. Матрица называется *невырожденной*, если она квадратная, а ее определитель не равен нулю. Квадратная матрица с нулевым определителем называется *вырожденной*.

Лемма 5.2. *Если матрица A обратима, то она невырождена.*

Доказательство. Мы уже доказывали, что обратимые матрицы обязательно квадратные. Если A^{-1} и A – квадратные, то по свойству 4.10 имеем $1 = \det E = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1}) \cdot \det A$, откуда $\det A \neq 0$. □

Теорема 5.3. *Если матрица невырождена, то она обратима, причем $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Ad(A)^T$, где $Ad(A)$ – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы A, т.е. элемент матрицы $Ad(A)$ в позиции (i, j) равен A_{ij}.*

Доказательство. Пусть A – матрица размера $n \times n$, а $B = A \cdot Ad(A)^T$. Элемент матрицы $Ad(A)^T$ в позиции (k, j) равен A_{jk}. Получаем: $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$. При $i = j$, по свойству 4.8, $b_{ij} = \det A$, а при $i \neq j$, по свойству 4.9, $b_{ij} = 0$. Таким образом, $B = \det A \cdot E$, откуда $\frac{1}{\det A} A \cdot Ad(A)^T = E$. Аналогично, $\frac{1}{\det A} Ad(A)^T A = E$, а это и означает, что $\frac{1}{\det A} Ad(A)^T = A^{-1}$. □

Теорема 5.4 (Формулы Крамера)**.** *Пусть A – матрица размера $n \times n$, а b столбец высоты n. Обозначим через Δ определитель матрицы A, а через Δ_i – определитель матрицы, полученной из A заменой i-ого столбца столбцом b. Система линейных уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$, причем $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.*

Доказательство. Если $\Delta = 0$, то пытаясь привести матрицу A методом Гаусса к треугольному виду мы обязательно получим нулевую строку (иначе по свойству 4.6 определитель A был бы не равен нулю). Поэтому система либо не будет иметь решений, либо решений будет бесконечно много (подробнее об этом будет сказано позже в теореме Кронекера–Капелли).

Если $\Delta \neq 0$, то, умножая равенство $Ax = b$ слева на A^{-1} получим $x = A^{-1}b$. Подставляя формулу для обратной матрицы из теоремы 5.3, получим $x = \frac{1}{\Delta} Ad(A)^T$ или $x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k$. Осталось заметить, что по теореме 4.8 $\sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k = \Delta_i$. □