ПУНКТИРНЫЙ КОНСПЕКТ КУРСА ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ГРУППАМ

А. Степанов и А. Ставрова

Введение

Мы будем стараться вести конспект наших лекций в меру наших (весьма ограниченных по времени) сил. Как выяснилось в процессе, авторы спецкурса любят разный язык: Степанов предпочитает функториальный язык и язык общих элементов, в то время как Ставрова хочет, чтобы схема была бы локально окольцованным топологическим пространством. Для того, чтобы одно не противоречило другому, мы постараемся написать "словарь" с одного из этих языков на другой. Вероятно это будет полезно и для нас самих.

В конспекте будут (со временем) представлены все упомянутые утверждения, но не будет всех доказательств. В настоящий момент представляется, что доказательства, которые можно найти в какой-нибудь книге (на том же языке) будут заменены ссылками. Доказательства же, которые мы переводим на другой язык или разбираем подробнее, чем они написаны в оригинале, мы будем полностью приводить в конспекте.

Иногда мы будем пользоваться утверждениями из алгебраической геометрии или коммутативной алгебры без доказательства их на доске. В этом случае в качестве ссылки в конспекте часто будет фигурировать только ссылка на книгу. Надеемся, что вы сможете найти там необходимые утверждения, или воспринимать их, как аксиомы.

Обозначения

Здесь приведены нестандартные обозначения, используемые в конспекте. При этом в лекциях те же буквы могут обозначать что-нибудь другое (чтобы не менять обозначения книги, по которой мы читаем в данный момент времени). При переписывании лекций в конспект мы будем стараться стандартизировать обозначения.

Пусть G – аффиная групповая схема над K, а R – K-алгебра.

- Для $h \in G(K)$ через h_R обозначим его канонический образ в $G(R)$.
- $A = K[G]$ – аффинная алгебра схемы G, а $g \in G(A)$ – ее общий элемент, I – фундаментальный идеал. Подробности в парграфе 4.
-

1. Немного алгебраической геометрии

Определение 1.1. Нетерово топологическое пространство – это пространство, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепей замкнутых множеств.

Лемма 1.2. $\operatorname{Spec} R$ *нетерово* $\iff$ R *нетерово.*

Лемма 1.3. X *– нетерова аффинная схема. Тогда*

(1) X *является объединением конечного числа неприводимых компонент.*
(2) X *является дизъюнктным объединением конечного числа связных компонент.*

Замечание 1.4. $\operatorname{Spec} R$ связен $\iff$ R не раскладывается в прямую сумму $\iff$ в R нет нетривиальных идемпотентов.

Замечание 1.5. Неприводимые замкнутые подмножества в $\operatorname{Spec} R$ – это замыкания одноточечных подмножеств.

Лемма 1.6. *Пусть K – поле, A – конечнопорожденная K-алгебра, а $X = \operatorname{Spec} A$.*

(1) *Замкнутые точки X – это максимальные идеалы. Фактор по максимальному идеалу – конечное алгебраическое расширение K.*
(2) *Множество замкнутых точек плотно в X.*
(3) *Если K алгебраически замкнуто, то $X(K) = \operatorname{Hom}(A, K)$ плотно в X. (здесь $X(F)$ отождествляется с множеством ядер гомоморфизмов $A \to F$ в случае, когда F – поле, подробнее о всяких отождествлениях и переводах с одного языка на другой см. не написанный пока параграф 3).*

Замечание 1.7. Любая конечнопорожденная K-алгебра A нетерова. Радикал Джекобсона такой алгебры совпадает с ее нильпотентным радикалом.

Определение 1.8. Алгебраическая аффинная схема – это схема конечного типа над полем, т. е. спектр конечнопорожденной алгебры над полем.

Если $X = \operatorname{Spec} A$, то $X_{red} = \operatorname{Spec} A/\operatorname{NilRad} A$. Схема X называется приведенной, если $X = X_{red}$.

Определение 1.9. Локальная, конечно порожденная K-алгебра R с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ называется регулярной, если минимальное количество d образующих идеала $\mathfrak{m}$, равно размерности Крулля $\dim A$. Кстати, $d = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (по лемме Накаямы), а если R – область целостности, то $\dim R = \operatorname{tr.deg.} F/K$, где F – поле частных R (см. [2, Proposition 2.5.19]).

Алгебраическая аффинная схема $X = \operatorname{Spec} A$ над замкнутым полем K называется гладкой, если для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ является регулярным локальным кольцом.

2. Базовые свойства над замкнутым полем

Для простоты считаем, что K – замкнутое поле (где-то это нужно, а где-то нет). A – конечнопорожденная K-алгебра.

Теорема 2.1. *Пусть G – аффинная алгебраическая группа над K.*

(1) *G_{red} – замкнутая подгруппа в G.*
(2) *G – гладкая $\iff$ G – приведенная.*

Доказательство. В доказательстве (1) используется формула: $A/\operatorname{NilRad} A \otimes A/\operatorname{NilRad} A \cong (A \otimes A)/\operatorname{NilRad}(A \otimes A)$ (см. [1]), а также функториальность отображения $R \mapsto R_{red}$.

Докажем, что из приведенности следует гладкость. Во-первых, множество простых идеалов $\mathfrak{p}$ в конечно-порожденной k-алгебре A, таких что $A_{\mathfrak{p}}$ - регулярное (это множество называется регулярным локусом), открыто в $\operatorname{Spec} A$ [2, Proposition 4.2.24]. Во-вторых, это множество непусто по [2, Lemma 4.2.21]. Так как множество замкнутых точек плотно, то любое непустое открытое множество содержит замкнутую точку. Следовательно, существует максимальный идеал $\mathfrak{m}$ в A такой, что $A_{\mathfrak{m}}$ регулярно. Так как $G(K)$ транзитивно действует на себе сдвигами, все элементы $G(K)$ обладают этим свойством, т. е. $G(K)$ содержится в регулярном локусе. С другой стороны, дополнение регулярного локуса – замкнутое множество, значит, оно либо пусто, либо содержит замкнутую точку G (а именно, максимальный идеал, содержащий идеал, определяющий это множество). Следовательно, дополнение пусто.

Обратно, если G гладкая, то все локализации $A_{\mathfrak{p}}$ являются регулярными локальными кольцами, которые по [?, Corollary 10.14] являются областями целостности. Если $x \in A \setminus \{0\}$ нильпотент, то $\operatorname{Ann}_A(x) \leq \mathfrak{m}$ для некторого максимального идеала $\mathfrak{m}$, а тогда образ x в $A_{\mathfrak{m}}$ не равен 0, что противоречит тому, что $A_{\mathfrak{m}}$ – область целостности. $\square$

Пример 2.2 (Примеры негладких схем)**.** Пусть K – поле характеристики p.

(1). Отождествим $K[\mathbb{G}_m]$ с кольцом лорановских многочленов $K[t, t^{-1}]$. Возведение в n-ю степень является эндоморфизмом мультипликтивной группы кольца, который индуцирует эндоморфизм схемы $(\mathbb{G}_m)_K$. Ядро этого гомоморфизма является замкнутой подгруппой μ_n в $(\mathbb{G}_m)_K$, определяемой идеалом, порожденным элементом $t^n - 1$. Если $n = pr$, то кольцо $K[\mu_n] = K[t, t^{-1}]/(t^n - 1) = K[t]/\big((t^r - 1)^p\big)$ не является редуцированным.

(2). Отождествим $K[\mathbb{G}_a]$ с кольцом многочленов $K[t]$. Возведение в степень p^r является эндоморфизмом аддитивной группы K-алгебры R. Он индуцирует эндоморфизм групповой схемы $(\mathbb{G}_a)_K$. Ядро этого морфизма является замкнутой подсхемой $\mathbb{G}_{a,r}$ в $(\mathbb{G}_a)_K$, определяемой идеалом, порожденным t^{p^r}. Таким образом, $K[\mathbb{G}_{a,r}] = K[t]/(t^{p^r})$ – локальное кольцо, максимальный идеал которого является нильпотентным.

Заметим, что при $r = 1$ схемы в примерах (1) и (2) изоморфны, но групповые схемы различны: в (1) $\Delta(t) = t \otimes t$, а в (2) $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$.

Теорема 2.3. *Сопоставление* $\{$*подгруппы в* $G\} \to \ldots$ $H \mapsto H(K)$ – *биекция на множество замкнутых подгрупп в* $G(K)$.

Доказательство. $f \in A$, $x_1, x_2 \in G(K)$. □

3. Перевод на функториальный язык

4. Язык общих элементов

Переведем определение копроизведения в аффинной алгебре схемы G на язык общих элементов. Пусть G – аффинная групповая схема над K, $A = K[G]$ – ее аффинная алгебра, а $g \in G(A)$ – общий элемент схемы G. Обозначим через $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – гомоморфизмы K-алгебр $A \to A \otimes A$, заданные формулами $g^{(1)}(a) = a \otimes 1$, а $g^{(2)}(a) = 1 \otimes a$. Эти отображения являются элементами группы $G(A \times A)$, их произведение в этой группе – это копроизведение $\Delta : A \to A \otimes A$.

Нетрудно видеть, что $e_K \in G(K)$ – это и есть коединица $A \to K$. Ядро этого отображения называется фундаментальным идеалом, мы будем обозначать его через I. Так как композиция гомоморфизмов $K \to A \to K$ тождественна, то $A = K \oplus I$ (равенство K-модулей). При этом коединица – это проекция на первое прямое слагаемое, а гомоморфим $e_A : A \to A$ – это композиция e_K со структурным отображением $K \to A$.

Пусть $\mathfrak{a}$ идеал кольца R. Главной конгруэнц-подгруппой $G(R, \mathfrak{a})$ уровня $\mathfrak{a}$ называется ядро гомоморфизма редукции $\rho_{\mathfrak{a}} : G(R) \to G(R/\mathfrak{a})$. Ясно, что $g \in G(A, I) = \operatorname{Ker} G(e_K)$. Легко заметить, что условие $h \in G(R, \mathfrak{q})$ эквивалентно коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e_K"'] & R \arrow[d, "\rho_{\mathfrak{q}}"] \\ K \arrow[r] & R/\mathfrak{q} \end{tikzcd}$$

что в свою очередь очевидно эквивалентно включению $h(I) \subseteq \mathfrak{q}$. В частности, $\mathfrak{q} = h(I)R$ является наименьшим идеалом таким, что $h \in G(R, \mathfrak{q})$.

Лемма 4.1. *Если* $a \in I$, *то* $\Delta(a) \in a \otimes 1 + 1 \otimes a + I \otimes I$.

Доказательство. $\Delta = g^{(1)} g^{(2)} \in G(A, I \otimes A + A \otimes I)$, поэтому $\Delta(a) \in I \otimes A + A \otimes I$. Далее, пусть $\Delta(a) = \sum (\bar{b}_i + b_i) \otimes (\bar{c}_i + c_i)$, где $b_i, c_i \in I$, а $\bar{b}_i, \bar{c}_i \in K$. Так как $\Delta(a) \in I \otimes A + A \otimes I$, то $\sum \bar{b}_i \bar{c}_i = 0$. Поэтому

$$\Delta(a) = \sum (\bar{b}_i + b_i)\bar{c}_i \otimes 1 + \sum 1 \otimes \bar{b}_i(\bar{c}_i + c_i) + \sum b_i \otimes c_i.$$

С другой стороны,

$$a = g(a) = (e_A g)(a) = \big(e_A \mathbin{\overline{\otimes}} g\big)\big(\Delta(a)\big) = \sum e_A(\bar{b}_i + b_i)g(\bar{c}_i + c_i) = \sum \bar{b}_i(\bar{c}_i + c_i).$$

Аналогично $a = (e_A g)(a) = \sum(\bar{b}_i + b_i)\bar{c}_i$. Таким образом, $\Delta(a) \in a \otimes 1 + 1 \otimes a + I \otimes I$. $\square$

Далее мы установим связь между комодульным отображением и элементами $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$, определенными выше.

Определение 4.2. Пусть M – произвольный K-модуль и задано естественное преобразвание K-функторов $\pi = \pi_M : G \to \mathrm{Aut}(M \otimes \_)$ (имеется ввиду, что $G(R)$ отображается в группу R-линейных автоморфизмы модуля $M \otimes R$). Тогда M называется G-модулем.

Пусть M – G-модуль. Отображение $\Delta_M : M \to M \otimes A$, заданное формулой $\Delta_M(m) = \pi(g)(m \otimes 1)$ называется комодульным отображением. Это отображение полностью определяет структуру G-модуля, потому что для любой K-алгебры R, $n \in M$, $r \in R$ и $h \in G(R)$ образ $n \otimes r$ под действием h определен однозначно. Действительно, по определению G-модуля следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Aut}(M \otimes A) \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ G(R) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Aut}(M \otimes R) \end{array}$$

При этом правая стрелка (это, конечно, не сам гомоморфизм $h : A \to R$, а гомоморфизм групп, индуцированный h) действует следующим образом: автоморфизму φ модуля $M \otimes A$ сопоставляется гомоморфизм $h(\varphi)$, заданный на неразложимых тензорах формулой

$$h(\varphi)(n \otimes r) = (id \otimes h)\big(\varphi(n \otimes 1)\big) \cdot r.$$

Так как $h(g) = h$, то

$$\pi(h)(n \otimes r) = h\big(\pi(g)\big)(n \otimes r) = (id \otimes h)\big(\pi(g)(n \otimes 1)\big) \cdot r = (id \otimes h)\big(\Delta_M(n)\big) \cdot r. \tag{4.1}$$

Определение 4.3. Пусть M – G-модуль, а N – K-подмодуль в M. Он называется G-подмодулем в M, если для любой K-алгебры R, для любых $n \in N$, $r \in R$ и $h \in G(R)$ имеет место включение $h(n \otimes r) \in N \otimes R$.

Из рассуждений, приведенных перед определением следует, что N является G-подмодулем тогда и только тогда, когда $\Delta_M(N) \subseteq N \otimes A$.

Лемма 4.4. $(\Delta_M \otimes id) \circ \Delta_M = (id \otimes \Delta) \circ \Delta_M$.

Доказательство. При обычном определении комодульного отображения формула в условии леммы получается обращением стрелок в равенстве $\pi(f)\big(\pi(h)(m)\big) = \pi(fh)(m)$, записанном в виде композиции отображений. При нашем определении надо провести следующее вычисление.

Пусть $m \in M$, а $a \in A$. Заметим, что

$$\pi(g^{(1)})(m \otimes 1 \otimes a) = \pi(g)(m \otimes 1) \otimes a. \tag{4.2}$$

Положим $g(m \otimes 1) = \sum m_i \otimes a_i$. Тогда

$$(\Delta_M \otimes id) \circ \Delta_M(m) = (\Delta_M \otimes id)(\sum m_i \otimes a_i) = \sum \pi(g)(m_i \otimes 1) \otimes a_i. \tag{4.3}$$

Используя формулу (4.1), получим

$$(id\otimes\Delta)\circ\Delta_M(m)=\pi(\Delta)(m\otimes 1\otimes 1)=\pi(g^{(1)})\big(\pi(g^{(2)})(m\otimes 1\otimes 1)\big)= \\ \pi(g^{(1)})\big(\sum m_i\otimes g^{(2)}(a_i)\big)=\pi(g^{(1)})\big(\sum m_i\otimes 1\otimes a_i\big) \tag{4.4}$$

В соответствие с формулой (4.2) правые части формул (4.3) и (4.4) совпадают. □

5. Замкнутые подгруппы и подсхемы

Пусть X аффинная схема над кольцом K. Предположим, что для любой K-алгебры R задано подмножество $S(R)\subseteq X(R)$. Рассмотрим множество всех замкнутых подсхем Y в X, обладающих свойством $S(R)\subseteq Y(R)$ для любой K-алгебры R. Так как пересечение замкнутых подсхем является замкнутой подсхемой, то это множество содержит наименьший (по включению) элемент. Он называется замыканием набора S и обозначается $\overline{S}$.

В следующей теореме мы будем рассматривать замыкание для следующей ситуации: R – фиксированная K-алгебра, $S(R)$ – некоторое фиксированное подмножество в $X(R)$, а $S(R')=\varnothing$ для всех $R'\neq R$. В этом случае будем говорить о замыкании подмножества $S=S(K)\subseteq X(K)$. На самом деле, легко видеть, что идеал в $K[X]$, определяющий подсхему $\overline{S}$, равен пересечению ядер гомоморфизмов $s:K[X]\to K$ по всем $s\in S$.

Теорема 5.1. *Пусть G аффинная групповая схема над кольцом K, а S – подгруппа в $G(K)$. Если схема $\overline{S}$ является плоской, то она является групповой подсхемой в G.*

Доказательство. Обозначим через $g_{\overline{S}}\in G(K[\overline{S}])$ гомоморфизм редукции $K[G]\to K[\overline{S}]=K[G]/\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}=\bigcap\limits_{s\in S}\operatorname{Ker}s$ – идеал, определяющий подсхему $\overline{S}$. Другими словами, $g_{\overline{S}}$ – это образ общего элемента схемы $\overline{S}$ в группе $G(K[\overline{S}])$. Напомним, что для любой K-алгебры R элементы группы $G(K)$ отождествляются со своими образами в $G(R)$ под действием структурного отображения $K\to R$. Гомоморфизм $s:K[G]\to K$, принадлежащий $S\subseteq\overline{S}(K)$ пропускается через гомоморфизм $K[\overline{S}]=K[G]/\mathfrak{q}\to K$, который мы будем обозначать через $\bar{s}$.

Для любого $x\in S$ рассмотрим элемент $g_{\overline{S}}x\in G(K[\overline{S}])$. Для $s\in S$ композиция $\bar{s}\circ(g_{\overline{S}}x)=sx\in S\subseteq\overline{S}(K)$. Так как пересечение ядер гомоморфизмов $sx:K[G]\to K$ по всем $s\in S$ равно $\mathfrak{q}$, а пересечение ядер $\bar{s}$ по всем $s\in S$ тривиально, то ядро гомоморфизма $g_{\overline{S}}x:K[G]\to K[\overline{S}]$ равно $\mathfrak{q}$.

Рассмотрим теперь элемент $g_{\overline{S}}^{(1)}g_{\overline{S}}^{(2)}\in G(K[\overline{S}]\otimes K[\overline{S}])$. Для любого $x\in S$ композиция $(id\otimes\bar{x})\circ(g_{\overline{S}}^{(1)}g_{\overline{S}}^{(2)})=g_{\overline{S}}x$. Так как пересечение ядер гомоморфизмов $\bar{x}$ по всем $x\in S$ тривиально, а $G(K[\overline{S}])$ – плоский K-модуль, то пересечение ядер гомоморфизмов $id\otimes\bar{x}:K[\overline{S}]\otimes K[G]\to K[\overline{S}]\otimes K$ также тривиально. Следовательно, ядро отображения $g_{\overline{S}}^{(1)}g_{\overline{S}}^{(2)}$ равно $\mathfrak{q}$ и это отображение пропускается через $K[\overline{S}]$. □

6. Линейные представления

В этом параграфе мы рассмотрим представление групповой схемы на своей аффинной алгебре трансляциями и докажем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть G – плоская аффинная групповая схема конечного типа над кольцом K. Тогда существует точный конечнопорожденный G-модуль M.*

Для этого нам понадобится следующий (видимо, хорошо известный) результат о плоских модулях.

Лемма 6.2. *Пусть A – плоский K-модуль, $f : X \to Y$ – K-линейное отображение, а Y' – подмодуль в Y. Тогда $(f \otimes id)^{-1}(Y' \otimes A) = f^{-1}(Y') \otimes A$.*

Если $S \subseteq M$, то наименьший G-подмодуль в M, содержащий S называется G-подмодулем, порожденным S, и обозначается через KGS. Такой подмодуль всегда существует, так как пересечение G-подмодулей является G-подмодулем. Эндоморфизм $a \in \operatorname{End}(V)$ называется локально конечным, если любой $v \in V$ содержится в конечномерном a-инвариантном подпространстве.

Теорема 6.3. *Пусть G – плоская аффинная групповая схема над K, M – G-модуль, а $m \in M$. Тогда подмодуль KGm конечно порожден (как K-модуль).*

В частности, образ любого элемента группы G в $\operatorname{Aut}(M)$ является локально конечным.

Доказательство. Пусть $\Delta_M(m) = \sum_{i=1}^{k} m_i \otimes a_i$, где $m_i \in KGm$. Обозначим K-подмодуль в M, порожденный элементами $m_1, \dots, m_k$ через M'. По определению $M' \le KGm$. Пусть

$$N = \{n \in M \mid \Delta_M(n) \in M' \otimes A\} = \Delta_M^{-1}(M' \times A).$$

Очевидно, что $m \in N$. С другой стороны, подставляя $h = e \in G(K)$ и $r = 1$ в формулу (4.1), получим $N \le M'$.

Сначала мы хотим проверить, что N является G-модулем, т. е. $\Delta_M(n) \in N \otimes A$ для любого $n \in N$. По лемме 6.2 $(\Delta_M \otimes id)^{-1}(M' \times A \times A) = N \otimes A$. Таким образом, нам достаточно доказать, что $(\Delta_M \otimes id)\big(\Delta_M(n)\big) \in M' \times A \times A$. По лемме 4.4 имеем

$$(\Delta_M \otimes id)\big(\Delta_M(n)\big) = (id \otimes \Delta)\big(\Delta_M(n)\big) = \sum_{i=1}^{k} m_i \otimes \Delta(a_i),$$

откуда следует необходимое включение.

Таким образом, N является G-подмодулем в M, содержащим m, следовательно, N содержит KGm. Получаем $KGm \le N \le M' \le KGm$, откуда $KGm = M'$, а M' по определению конечно порожден. $\square$

Следствие 6.4. *Если S – конечное подмножество плоского G-модуля M, то KGS конечно порожден.*

Обозначим через $\lambda, \rho : G \to \operatorname{Aut}(A \otimes \_)$ представления, индуцированные действием схемы G на себе левыми и правыми сдвигами соответственно. Для $x \in G(R)$ автоморфизмы $\rho(x)$ и $\lambda(x)$ называются правой и левой трансляцией, сооответственно. Заметим, что для получения левого действия $G(R)$ на $A \otimes R$ (с учетом *анти*эквивалентности категорий) нам нужно правое действие G на себе, так что правые сдвиги – это умножение справа на данный элемент, а левые – умножение слева на обратный к нему. Если R' является R-алгеброй посредством гомоморфизма $\varphi : R \to R'$, то $\rho(x) \otimes_R id$ является автоморфизмом модуля $A \otimes R \otimes_R R' = A \otimes R'$. Вычисление показывает, что оно равно $\rho\big(\varphi(x)\big)$. То же самое имеет место с заменой ρ на λ.

Доказательство теоремы 6.1. Если G – плоская схема конечного типа, то ее аффинная алгебра $A = K[G]$ конечно порождена над K и является плоским K-модулем. Действие схемы на себе правыми сдвигами индуцирует ее действие на K-модуле A засчет антиэквивалентности категорий аффинных схем над K и K-алгебр. Это действие задает на A структуру G-модуля. Так как разные элементы группы порождают разные левые сдвиги, то представление G в A является точным. Пусть $b_1, \dots, b_l$ – образующие алгебры A над K. Ясно, что для любой K-алгебры R разные элементы группы $G(R)$ действуют по разному на множестве $S = \{b_1, \dots, b_l\}$ (иначе они действовали бы одинаково на всей алгебре $A \otimes R$). По следствию 6.4 модуль KGS конечнопорожден, а в предыдущей фразе сказано, что он точен. $\square$

Рассмотрим теперь представления правыми и левыми трансляциями более подробно.

Лемма 6.5. *Пусть R – произвольная K-алгебра, $x, y \in G(R)$.*

1. *Комодульное отображение для ρ совпадает с Δ, а для λ – с $(g^{(2)})^{-1}g^{(1)}$.*
2. $y \circ \rho(x) = x \circ \lambda(y^{-1}) = yx$.
3. *Автоморфизмы $\rho(x)$ и $\lambda(y)$ коммутируют.*
4. *Предположим, что R – алгебраически замкнутое поле, а G_R редуцированная схема конечного типа над R. Пусть b автоморфизм алгебры $A \otimes R$, коммутирующий со всеми автоморфизмами $\lambda(a)$, $a \in G(R)$. Тогда $\rho(e_R \circ b) = b$ (здесь e_R рассматривается как элемент группы $G_R(R) = G(R)$, т. е. как гомоморфизм $A \otimes R \to R$).*

Доказательство. Пусть комодульное отображение для некоторого представления $\pi : G \to \mathrm{Aut}(A \otimes \_)$ равно Δ, $x \in G(R)$, $r \in R$, а $f \in A$. Тогда по формуле (4.1) $\pi(x)(f \otimes r) = (id \otimes x) \circ \Delta(f) \cdot r$. Для того, чтобы получить действие элемента x на элементе $y \in G(R')$ для некоторой R-алгебре R' надо отобразить x в $x' \in G(R')$ и взять композицию $y \circ \pi(x')$, рассматривая y, как элемент из $G_{R'}(R')$, т. е. R'-линейный гомоморфизм $y \mathbin{\overline{\otimes}} id : A \otimes R' \to R'$. Ясно, что можно считать, что $R = R'$ и $x = x'$. Тогда

$$y \circ \pi(x)(f \otimes r) = (y \mathbin{\overline{\otimes}} id) \circ (id \otimes x) \circ \Delta(f) \cdot r = (y \mathbin{\overline{\otimes}} x) \circ \Delta(f) \cdot r = (yx)(f \otimes r).$$

Таким образом, π индуцирует действие $G(R)$ на себе правыми сдвигами и, следовательно, совпадает с ρ. Доказательство для λ аналогично.

Второе утверждение следует из выделенной формулы. Третье утверждение очевидно вытекает из ассоциативности умножения и антиэквивалентности категорий.

В соответствии с пунктом (2) для любого $a \in G(R) = G_R(R)$ имеем

$$\begin{aligned} a \circ \rho(e_R \circ b) = a \cdot (e_R \circ b) = (e_R \circ b) \circ \lambda(a^{-1}) = e_R \circ (b \circ \lambda(a^{-1})) = \\ e_R \circ (\lambda(a^{-1}) \circ b) = e_R \circ \lambda(a^{-1})) \circ b = (a \cdot e_R) \circ b = a \circ b. \end{aligned}$$

Так как R – алгебраически замкнутое поле, а $A \otimes R$ конечно порождено над R, то все максимальные идеалы алгебры $A \otimes R$ являются ядрами отображений $a : A \otimes R \to R$. Для конечнопорожденной алгебры над полем пересечение всех максимальных идеалов (радикал Джекобсона) совпадает с нильпотентным радикалом. Так как схема G_R редуцированная, то нильпотентный радикал $A \otimes R$ равен нулю. Таким образом, $\bigcap\limits_{a \in G_R(R)} \mathrm{Ker}\, a = \{0\}$ и из выделенной формулы следует, что $\rho(e_R \circ b) = b$. ◻

7. Алгебра распределений и алгебра Ли

Обозначим K-модуль, двойственный к A, через $A^* = \mathrm{Hom}_{K-\mathrm{mod}}(A, K)$. Введем произведение на A^* по формуле $\mu\nu = (\mu \mathbin{\overline{\otimes}} \nu) \circ \Delta$. Из ассоциативности произведения в группе точек схемы G следует формула

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

(эту формулу можно рассматривать также как частный случай формулы из леммы 4.4 для представления, индуцированного действием схемы на себе правыми сдвигами). Из этой формулы следует ассоциативность произведения в A^*. Таким образом, $G(K)$ является подгруппой мультипликативной группы алгебры A^*.

Обозначим через $\mathrm{Dist}_n(G)$ подмножество в A^*, состоящее из всех отображений, аннулирующих идеал I^{n+1}, а через $\mathrm{Dist}_n^+(G)$ – подмножество в $\mathrm{Dist}_n(G)$, состоящее из всех отображений, аннулирующих K. Положим $\mathrm{Dist}(G) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Dist}_n(G)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{Dist}_n(G)\,\mathrm{Dist}_m(G) \subseteq$

$\mathrm{Dist}_{m+n}(G)$, откуда следует, что $\mathrm{Dist}(G)$ является фильтрованной подалгеброй в A^*. Она называется алгеброй распределений схемы G или ее гипералгеброй. Заметим, что $\mathrm{Dist}_n(G) \cong (A/I^{n+1})^*$, а $\mathrm{Dist}^+_n(G) \cong (I/I^{n+1})^*$ как K-модули.

Лемма 7.1. $[\mathrm{Dist}_n(G), \mathrm{Dist}_m(G)] \subseteq \mathrm{Dist}_{m+n-1}(G)$. *Таким образом, градуированная алгебра, ассоциированная с* $\mathrm{Dist}(G)$ *является коммутативной.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathrm{Dist}_n(G)$, $\nu \in \mathrm{Dist}_m(G)$, а $b_1, \dots, b_{m+n} \in I$. По лемме 4.1

$$\Delta(b_1 \cdots b_{m+n}) \in \prod_{k=1}^{m+n} (b_k \otimes 1 + 1 \otimes b_k + I \otimes I) \subseteq \prod_{k=1}^{m+n} (b_k \otimes 1 + 1 \otimes b_k) + \sum_{p+q>m+n} I^p \otimes I^q.$$

Так как $\mu \mathbin{\overline{\otimes}} \nu$ аннулирует $I^p \otimes I^q$ при $p+q > m+n$, то

$$(\mu \mathbin{\overline{\otimes}} \nu)\big(\Delta(b_1 \cdots b_{m+n})\big) = (\mu \mathbin{\overline{\otimes}} \nu)\Big(\prod_{k=1}^{m+n} (b_k \otimes 1 + 1 \otimes b_k)\Big) = \sum_{Z \subseteq \overline{m+n}} \mu\Big(\prod_{i \in Z} b_i\Big)\nu\Big(\prod_{j \notin Z} b_j\Big).$$

Теперь очевидно, что $(\nu \mathbin{\overline{\otimes}} \mu)\big(\Delta(b_1 \cdots b_{m+n})\big)$ также равно правой части последнего равенства, откуда $(\mu\nu - \nu\mu)(b_1 \cdots b_{m+n}) = 0$, т. е. $[\mu, \nu]$ аннулирует I^{m+n}. $\square$

K-модуль $\mathrm{Dist}^+_1(G) \cong (I/I^2)^*$ называется касательным пространством к схеме G в точке e. Этот модуль действительно изоморфен модулю всех дифференцирований $\mathrm{Der}_A(A, K)$ (здесь K рассматривается как A-модуль посредством гомоморфизма редукции по идеалу I). В соответствие с леммой 7.1, касательное пространство замкнуто относительно операции коммутирования и, очевидно, является алгеброй Ли по отношению к этой операции. Эта алгебра называется алгеброй Ли схемы G и обозначается через $\mathrm{Lie}(G)$.

8. Разложение Жордана

В этом параграфе K – алгебраически замкнутое поле.

Теорема 8.1. *Пусть V – конечномерное векторное пространство над замкнутым полем K, $a \in \mathrm{End}(V)$, а $b \in \mathrm{End}(W)$.*

(1) *Существуют полупростой $a_s \in \mathrm{End}(V)$ и нильпотентный $a_n \in \mathrm{End}(V)$ такие, что $a = a_s + a_n$ и $a_s a_n = a_n a_s$ (аддитивное разложение Жордана).*
(2) *Если a обратим, то a_s обратим. Положим $a_u = e + a_s^{-1} a_n \in \mathrm{GL}(V)$. Тогда a_u – унипотент, $a = a_s a_u$ и $a_s a_n = a_n a_s$ (мультипликативное разложение Жордана).*
(3) *Существуют многочлены $p, q \in tK[t]$ такие, что $a_s = p(a)$, а $a_n = q(a)$.*
(4) *Разложение Жордана сохраняется для a-инвариантных подпространств и фаторпространств по ним.*
(5) *Разложение Жордана “функториально” в следующем смысле: если $\varphi : V \to W$ линейное отображение, а b является “образом” эндоморфизма a, т. е. $\varphi \circ a = b \circ \varphi$, то b_s, b_n и b_u являются “образами” a_s, a_n и a_u соответственно.*
(6) *$a \oplus b = (a_s \oplus b_s) + (a_n \oplus b_n)$ и $a \otimes b = (a_s \otimes b_s)(a_u \otimes b_u)$ являются разложениями Жордана в $\mathrm{End}(V \oplus W)$ и $\mathrm{End}(V \otimes W)$ соответственно.*

Кавычки в пункте 5 стоят потому, что End не является функтором (не у любого эндоморфизма a есть “образ”).

Следующая цель – перенести разложение Жордана на локально конечные эндоморфизмы бесконечномерного векторного пространства V. Локально конечный эндоморфизм называется локально полупростым (нильпотентным), если сужение его на любое конечномерное инвариантное подпространство является полупростым (соотв. нильпотентным). Он называется локально унипотентным, если $a - e$ локально нильпотентен.

Следствие 8.2. *Теорема 8.1 переносится на бесконечномерный случай добавлением слова "локально" там, где необходимо.*

Рассмотрим представление ρ групповой схемы G на своей аффинной алгебре $A = K[G]$ индуцированное действием G на себе правыми сдвигами. Пусть $a \in G(K)$. По теореме 6.3 $\rho(a)$ является локально конечным автоморфизмом K-модуля A. По последнему следствию существует разложение Жордана $\rho(a) = \rho(a)_s\rho(a)_u$.

Теорема 8.3.

(1) *Существуют единственные элементы $a_s, a_u \in G(K)$ такие, что $\rho(a_s) = \rho(a)_s$, $\rho(a_u) = \rho(a)_u$, а $a = a_s a_u = a_u a_s$ (разложение Жордана в $G(K)$).*
(2) *Если $\varphi : G \to G'$ – морфизм групповых схем, то $\varphi(a_s) = \varphi(a)_s$ и $\varphi(a_u) = \varphi(a)_u$.*
(3) *Если $G = \mathrm{GL}_n$, то a_s и a_u – это полупростая и унипотентная часть автоморфизма a модуля K^n.*

Доказательство. (1). Отображение $\rho(a) : A \to A$ является гомоморфимом алгебр, поэтому оно коммутирует с умножением $A \otimes A \to A$. По пункту (6) теоремы 8.1 и следствию 8.2 полупростая и унипотентная части $\rho(a)$ также коммутируют с умножением, т. е. являются автоморфизмами алгебры A. Положим

$$a_s = e_K \circ \rho(a)_s \text{ и } a_u = e_K \circ \rho(a)_u.$$

Пусть $\tilde{a}$ – канонический образ a в $G(A)$. Так как ρ является представлением, то канонический образ $\rho(a)$ в $\mathrm{Aut}_A(A \otimes A)$ равен $\rho(\tilde{a})$.

По лемме 6.5(3) $\rho(a)$ коммутирует с левыми трансляциями. Снова применяя пункт (6) теоремы 8.1 и следствие 8.2 получаем, что $\rho(a)_s$ и $\rho(a)_u$ также коммутируют с левыми трансляциями. Тогда по лемме 6.5(4) $\rho(a_s) = \rho(a)_s$ и $\rho(a_u) = \rho(a)_u$.

∎

Список литературы

1. Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Мир, Москва, 1971 (russian).
2. Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002.