ФОРМУЛИРОВКИ ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ВТОРОЙ СЕМЕСТР (1998 Г.)

А.В.СТЕПАНОВ

Содержание

Часть 1. **Дифференциальное исчисление (продолжение)**

1. Элементы дифференциальной геометрии

Определение 1.1. Пусть U – нормированное линейное пространство, L – некоторое подмножество в U, и $a \in U$. **Окрестностью** точки a в L называется пересечение L с некоторым открытым шаром $V_\varepsilon(b)$, содержащее точку a.

Определение 1.2. L называется **гладкой кривой** в U, если для любой точки $a \in L$ существует окрестность V точки a в L и непрерывно дифференцируемая инъективная функция $f_a : (0,1) \to U$, множество значений которой совпадает с V. Набор функций f_a называется **параметризацией** кривой L. Кривая называется **неособой**, если существует такая параметризация f_a, что $f'_a(t) \neq 0$ для всех $a \in L$ и $t \in (0,1)$. Параметризация, обладающая этим свойством, также называется неособой.

1.3. В дальнейшем все кривые и параметризации будут по умолчанию предполагаться гладкими и неособыми. Более того, так как нас будут инересовать только локальные свойства кривых, то мы будем предполагать, что выбрана одна и та же функция f_a для всех точек a кривой L (т.е. вместо всей кривой L мы будем рассматривать ее часть, а именно, если нас интересует поведение кривой около точки a, то мы будем рассматривать окрестность V, выбранную по a, вместо всей кривой L). Кроме того, для простоты будем предполагать, что $U = \mathbb{R}^m$.

Определение 1.4. Касательной к кривой L в точке $a \in L$ называется предельное положение секущей. Точнее, пусть $f : (0,1) \to U$ – параметризация кривой L, и $a = f(t_0)$. **Касательным вектором** к кривой L в точке a называется вектор, коллинеарный ветору $r = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-a}{t-t_0} = f'(t_0)$. Тогда касательная к кривой L в точке a – это прямая, проходящая через точку a параллельно вектору r.

Предложение 1.5. *Предыдущее определение не зависит от выбора параметризации. Касательная к кривой L в точке a задается параметрически формулой $x(t) = a + f'(t_0)t$.*

Определение 1.6. Подмножество S называется **гладкой поверхностью** в U, если для любой точки $a \in S$ существует окрестность V точки a в S и непрерывно дифференцируемая инъективная функция $f_a : (0,1)^2 \to U$, множество значений которой совпадает с V, где $(0,1)^2$ – квадрат на плоскости. Набор функций f_a называется **параметризацией** поверхности. Поверхность называется **неособой**, если существует такая параметризация f_a, что $\operatorname{rank} f'_a(t) = 2$ для всех $a \in L$ и $t \in (0,1)^2$. Параметризация, обладающая этим свойством, также называется неособой.

1.7. Рассматривая поверхности, мы будем придерживаться соглашений, аналогичных1.3.

Определение 1.8. Касательной плоскостью к поверхности S в точке $a \in S$ называется предельное положение секущей. Точнее, пусть $f : (0,1)^2 \to U$ – параметризация поверхности S, и $a = f(t_0)$. Тогда касательная плоскость задается параметрически формулой $x(t) = a + f'(t_0)t$.

Предложение 1.9. *Предыдущее определение не зависит от выбора параметризации.*

Далее, для наглядности, мы будем иметь дело только с поверхностями в $U = \mathbb{R}^3$.

Предложение 1.10. *Для любой точки a на поверхности S существует окрестность $V = V_\varepsilon(a) \cap S$ и функция $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ такие, что $V = \{b \in V_\varepsilon(a) \mid F(b) = 0\}$. При этом, F непрерывно дифференцируема в точке a, и $F(a) \neq 0$.*

Определение 1.11. Градиентом функции $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^m$ называется вектор $F'(a)^T$. Он обозначается через $\operatorname{grad}_a F$.

Предложение 1.12. *Если поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то касательная плоскость в точке a задается уравнением*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a)(x - a_x) + \frac{\partial F}{\partial y}(a)(y - a_y) + \frac{\partial F}{\partial z}(a)(z - a_z) = 0$$

Градиент является нормальным вектором к касательной плоскости. Аналогичное утверждение имеет место для кривых в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1.13. *Пусть L – кривая, лежащая на поверхности S в $\mathbb{R}^3$, и $a \in L$. Тогда касательная к кривой L в точке a содержится в касательной плоскости к поверхности S.*

Определение 1.14. Пусть $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, $u, v \in \mathbb{R}^m$, и $||v|| = 1$. **Производной** функции F в точке u **по направлению** вектора v называется производная в точке 0 функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданной равенством $g(t) = F(u + tv)$. Она обозначается через $\frac{\partial F}{\partial v}(u)$.

Производная по направлению определяет скорость возрастания или убывания функции, если ее аргумент "движется" в данном направлении.

Предложение 1.15. $\frac{\partial F}{\partial v}(u) = (\operatorname{grad}_u F, v)$

Доказательство. $g'(0) = F'(u)(u + vt)' = (\operatorname{grad}_u F, v)$. □

Из последнего утверждения видно, что производная по направлению в данной точке максимильна, если направление совпадает с направлением градиента. Интуитивно это означает, что градиент показывает направление скорейшего возрастания функции.

2. Дифференцирование функций комплексной переменной

2.1. В этом параграфе мы будем рассматривать функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Очевидно, $\mathbb{C}$ является двумерным линейным пространством над $\mathbb{R}$. Выбрав базис $\{1, i\}$, каждому комплексному числу можно сопоставить пару действительных чисел: $\alpha + i\beta \mapsto (\alpha, \beta)$. Получаем биективное отображение $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ сохраняющее операции сложения и умножения на действительное число. Другими словами, φ является изоморфизмом линейных пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ над полем действительных чисел. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана стандартная норма, а в $\mathbb{C}$ норма – это модуль комплексного числа. Тогда можно заметить, что φ сохраняет норму.

С помощью отображения φ, каждой функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно сопоставить функцию $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по правилу: $\hat{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Очевидно, теория пределов функций комплексной переменной совпадает с теорией пределов функций из $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Определение 2.2. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $u \in \mathbb{C}$. Число $w \in \mathbb{C}$ называется производной функции f в точке w, если найдется бесконечно малая при $z \to u$ функция $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что

$$f(z) = f(u) + w \cdot (z - u) + \alpha(z)|z - u|$$

Если такое число w существует, то функция f называется дифференцируемой в точке u, а само w обозначается через $f'(u)$.

Теорема 2.3. *Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке u тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ диффирецируема в точке $\varphi(u)$ и частные производные функции $\hat{f}$ удовлетворяют условиям Коши–Римана:*

$$D_1\hat{f}_1(u) = D_2\hat{f}_2(u) \qquad \text{и} \qquad D_2\hat{f}_1(u) = -D_1\hat{f}_2(u)$$

При это ее производная равна $f'(u) = D_1\hat{f}_1(u) + iD_2\hat{f}_1(u)$

Предложение 2.4. *Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке и тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(u+\Delta z)-f(u)}{\Delta z}$. При этом ее производная равна указанному пределу.*

Часть 2. Ряды

3. Основные определения и простейшие свойства

Определение 3.1. Пусть U – нормированное линейное пространство, а a_k – последовательность элементов из U. Символ $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ называется **рядом** со слагаемыми a_k. Если $U = \mathbb{R}$ или $U = \mathbb{C}$, то ряд называется **числовым** (действительным или комплексным). Если U – некоторое пространство функций, то ряд называется **функциональным**.

Частичные суммы ряда – это конечные суммы $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$. **Суммой** ряда называется предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Она обозначается обычно тем же символом, что и сам ряд. Если последний предел существует и конечен, то говорят, что ряд **сходится**. В противном случае говорят, что ряд **расходится**.

Предложение 3.2.
(i) *Сходимость ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ не зависит от n_0.*
(ii) *Константу можно выносить за знак ряда, при этом ряды $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} \alpha a_k$ сходятся или расходятся одновременно (здесь $\alpha \neq 0$ – некоторое число).*
(iii) *$\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$, при этом сходимость двух из трех рядов, участвующих в формуле, влечет сходимость третьего.*

Предложение 3.3 (Необходимый признак сходимости). *Если ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ сходится, то последовательность a_k стремится к 0 при $k \to \infty$.*

Пример 3.4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Доказательство будет дано позже, на основании интегрального признака сходимости.

4. Положительные действительные ряды

Предложение 4.1 (Признак сравнения). *Пусть a_k и b_k – последовательности действительных чисел такие, что $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.*

Предложение 4.2 (Признак эквивалентной замены). *Пусть a_k и b_k – последовательности положительных действительных чисел, и $a_k \sim b_k$ при $k \to \infty$. Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} b_k$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$.*

Предложение 4.3 (Признак Даламбера)**.** *Пусть a_k – последовательность положительных действительных чисел, и $A = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ сходится, а если $A > 1$, то $a_k \not\to 0$, и, следовательно, ряд расходится.*

Предложение 4.4 (Признак Коши)**.** *Пусть a_k – последовательность положительных действительных чисел, и $A = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Если $A < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ сходится, а если $A > 1$, то $a_k \not\to 0$, и, следовательно, ряд расходится.*

Замечание 4.5. Если пределы из признаков Даламбера и Коши существуют, то они равны между собой.

5. Знакопеременные ряды

Предложение 5.1. *Пусть a_k – последовательность элементов нормированного линейного пространства U. Если ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} ||a_k||$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ тоже сходится. В этом случае говорят, что последний ряд сходится* **абсолютно**. *Если же последний ряд сходится, а ряд составленный из норм расходится, то говорят, что ряд сходится* **условно**.

Доказательство только для случая $U = \mathbb{R}$.

Предложение 5.2 (Признак Лейбница)**.** *Пусть a_k – убывающая последовательность положительных действительных чисел, и $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k a_k$ сходится. При этом $\left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leqslant a_n$ для любого натурального $n \geqslant n_0$.*

6. Функциональные ряды. Равномерная сходимость

В этом разделе $U = C([a,b])$ ($U = C(\mathbb{R})$) будет обозначать множество непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}$, где $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, (соотв. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), а f_k – последовательность элементов из U. Норма на линейном пространстве $C([a,b])$ задается формулой $||f|| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Определение 6.1. Будем говорить, что последовательность f_k **поточечно** сходится к функции f на $[a,b]$ и писать $f_k(x)@>k\to\infty>>f(x)$ на $[a,b]$, если при любом $x_0 \in [a,b]$ числовая последовательность $f_k(x_0)$ сходится к $f(x_0)$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k$ **поточечно** сходится на $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм поточечно сходится на $[a,b]$.

Определение 6.2. Будем говорить, что последовательность f_k **равномерно** сходится к f на $[a,b]$ и писать $f_k @E k\to\infty RR f$ на $[a,b]$, если она сходится к f по норме пространства $C([a,b])$. Другими словами, $f_k @E k\to\infty RR f$ на $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любых $n > N$ и $x \in [a,b]$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k$ **равномерно** сходится на $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится на $[a,b]$.

Предложение 6.3. *Из равномерной сходимости следует поточечная. Если $f_k @E k\to\infty RR f$ на $[a,b]$, то f непрерывна на $[a,b]$.*

Первое утверждение очевидно. Второе мы принимаем без доказательства.

Теорема 6.4. *Предположим, что существует числовая последовательность a_k такая, что $|f_k(x)| \leqslant a_k$ для любого натурального $k \geqslant n_0$ и любого $x \in [a,b]$, и ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k$ равномерно абсолютно сходится на $[a,b]$.*

7. Степенные ряды

Определение 7.1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется **степенным рядом**.

Теорема 7.2. *Пусть $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ (напомним, что если оба этих предела существуют, то они равны между собой, см.4.5). Тогда степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится поточечно на интервале $(-R,R)$, сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале, и расходится при $|x| > R$. Число R называется* **радиусом сходимости** *степенного ряда.*

Определение 7.3. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ называется **суммой** $A+B$ рядов $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n$ называется **произведением** ряда A **на число** λ и обозначается λA.

Произведением рядов A и B называется ряд $AB = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, коэффициенты которого вычисляются по формуле $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Если $a_0 \neq 0$, то существует ряд $D = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ такой, что $AD = B$. В этом случае D называется **частным** B/A рядов B и A. Его коэффициенты вычисляются рекуррентно по формуле $d_n = \frac{b_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_k a_{n-k}}{a_0}$.

Пусть $b_0 = 0$. Тогда **композицией** рядов A и B называется ряд $A \circ B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, коэффициенты которого вычисляются по правилу: c_n – это коэффициент при x^n многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(\sum\limits_{m=1}^{n} b_m x^m\right)^k$.

Производной функционального ряда $F(x) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k(x)$ называется ряд $F'(x) = \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f_k'(x)$. В частности, производная степенного ряда A равна $A' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Теорема 7.4. *Пусть $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $B = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – степенные ряды с радиусами сходимости R_A и R_B соответственно. Обозначим: $R = \min(R_A, R_B)$.*

Радиус сходимости суммы и произведения рядов A и B не меньше R.

Радиус сходимости производной ряда A равен R_A.

8. Ряды Тэйлора

Определение 8.1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется **рядом Тэйлора** функции f в точке x_0.

Теорема 8.2. *Предположим, что существует такое $C > 0$, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема в окрестности $V = (x_0 - C, x_0 + C)$ точки x_0 и $\frac{\sup\limits_{x\in V} f^{(n)}(x)C^n}{n!}$@ > $n \to \infty$ >> 0. Тогда ряд Тэйлора функции f в точке x_0 поточечно сходится к $f(x)$ на V. Более того, сходимость равномерна на любом отрезке, целиком принадлежащем окрестности V.*

Пример 8.3. Выпишем ряды Тэйлора в окрестности нуля некоторых элементарных функций.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n$$

Часть 3. **Интегральное исчисление**

9. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 9.1. Если $F' = f$, то F называется **первообразной** для функции f.

Теорема 9.2. *Если $F' = G' = f$ (т.е. F и G первообразные для функции f), то $F = G + C$ для некоторой константы $C \in \mathbb{R}$.*

Определение 9.3. Непределенным интегралом от функции f называется множество всех ее первообразных. Он обозначается через $\int f(x)\,dx$. По теореме 9.2 $\int f(x)\,dx = \{F + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}$, где $F' = f$. Допуская вольность речи, мы будем писать $\int f(x)\,dx = F + C$.

Введем следующее обозначение: $d\big(f(x)\big) = f'(x)\,dx$.

Предложение 9.4. *Свойства неопределенного интеграла.*

(1) *Линейность:* $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ *и* $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$, *где* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(2) *Интегрирование по частям:* $\int u(x)\,d\big(v(x)\big) = u(x)v(x) - \int v(x)\,d\big(u(x)\big)$
(3) *Замена переменной:* $\int f\big(g(x)\big)\,d\big(g(x)\big) = F\big(g(x)\big) + C$, *где* $F' = f$. *В частности,* $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

10. Интегральные суммы

Пусть $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, а $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограниченная функция.

10.1. **Разбиением** σ отрезка $[a,b]$ называется конечная, строго возрастающая последовательность $\{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Число n называется **длиной** разбиения. Обозначим

$\Delta_i = x_{i+1} - x_i$. Число $\Delta(\sigma) = \max(\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1})$ называется **рангом** разбиения σ. Если $\sigma \subseteq \sigma'$ – разбиения отрезка $[a, b]$, то σ' называется измельчением разбиения σ. Ясно, что $\Delta(\sigma) \geqslant \Delta(\sigma')$.

Пусть $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – произвольные точки. Обозначим: $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$.

Определение 10.2. **Интегральной суммой** для функции f, соответствующей разбиению $\sigma = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ и точкам $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ называется сумма

$$S(\sigma, f) = S(\sigma, f, c_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta_i$$

Суммы

$$\overline{S}(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta_i \qquad \text{и} \qquad \underline{S}(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta_i$$

называются **верхней** и **нижней** интегральными суммами, соответственно.

10.3. Будем говорить, что предел интегральных сумм для функции f равен A, когда ранг разбиения стремится к 0, и писать $\lim\limits_{\Delta(\sigma)\to 0} S(\sigma, f) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|S(\sigma, f) - A| < \varepsilon$, как только $\Delta(\sigma) < \delta$.

Определение 10.4. Если $\lim\limits_{\Delta(\sigma)\to 0} S(\sigma, f) = A$, то говорят что функция f **интегрируема** на отрезке $[a, b]$. При этом, число A называют **определенным интегралом** от функции f на отрезке $[a, b]$ и пишут $\int\limits_a^b f(x)\,dx = A$.

10.5. Приведем основные свойства интегральных сумм.

(1) $\underline{S}(\sigma, f) \leqslant S(\sigma, f) \leqslant \overline{S}(\sigma, f)$.
(2) При измельчении разбиения верхние интегральные суммы убывают, а нижние возрастают.
(3) Любая верхняя интегральная сумма не меньше любой нижней интегральной суммы, и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta(\sigma)\to 0} \overline{S}(\sigma, f) = \inf\limits_{\sigma} \overline{S}(\sigma, f)$, а $\lim\limits_{\Delta(\sigma)\to 0} \underline{S}(\sigma, f) = \sup\limits_{\sigma} \underline{S}(\sigma, f)$.
(4) Функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta(\sigma)\to 0} \big(\overline{S}(\sigma, f) - \underline{S}(\sigma, f)\big) = 0$.

11. Свойства определенных интегралов

Теорема 11.1. *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом промежутке.*

11.2. Свойства определенного интеграла.

(1) $\int\limits_a^b C\,dx = C(b - a)$.
(2) Линейность:
$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$
$$\int\limits_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

(3) Аддитивность. Если f интегрируема на $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a,b]$. Обратно, если f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$. При этом выполнено равенство:
$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

(4) Если $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Если $f(x) \geqslant g(x)$ для любого $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 11.3. *(о среднем) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x) \geqslant 0$ для любого $x \in [a,b]$. Тогда существует точка $\theta \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\theta)\int\limits_a^b g(x)\,dx$. В частности, существует $\theta \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\theta)(b-a)$.*

12. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция. Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ обозначает интеграл от f с переменным верхним пределом, т.е. $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ (заметим, что последний интеграл существует по свойству 11.2(3).

Теорема 12.1. *$F(t)$ неперерывна на $[a,b]$.*

Теорема 12.2. *(Барроу) Пусть f непрерывна в некоторой окрестности точки $c \in [a,b]$. Тогда $F'(c) = f(c)$.*

Следствие 12.3 (Формула Ньютона–Лейбница)**.** *Если f непрерывна на $[a,b]$, а F – любая первообразная для f. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

При этом используется обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$

Следствие 12.4. (1) *Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.*
$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx$

(2) *Замена переменных в определенном интеграле.*
$\int\limits_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$

13. Геометрические приложения определенного интеграла

Определение 13.1. Площадью прямоугольника называется произведение произведение длин его сторон.

Плоская фигура называется **ступенчатой**, если она равна объединению конечного числа прямоугольников, пересекающихся только по границам. **Площадью** $S(G)$ **ступеньчатой фигуры** G называется сумма площадей этих прямоугольников (можно показать, что она не зависит от разбиения G на прямоугольники; мы принимаем этот факт без доказательства).

Пусть D – ограниченное подмножество $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим множество всех ступенчатых фигур $\overline{\Omega}(D)$ (соотв. $\underline{\Omega}(D)$) содержащих (соотв. содержащихся в) D. **Площадью множества** D называется $\inf\limits_{G\in\overline{\Omega}(D)} S(G) = \sup\limits_{G\in\underline{\Omega}(D)} S(G)$, елси эти числа равны. В противном случае площадь множества D не определена.

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. **Площадью под графиком** функции f на отрезке $[a,b]$ называется разность площадей фигур D_f^+ и D_f^-, где

$$D_f^+ = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$
$$D_f^- = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \geqslant y \geqslant f(x)\}$$

Теорема 13.2. *Площадь под графиком функции f равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

Определение 13.3. Ломаной называется объединение отрезков, пересекающихся только на концах. **Длиной** $d(p)$ **ломаной** p называется сумма длин этих отрезков (ясно, что она не зависит от разбиения ломанной на отрезки). Напомним, что длина отрезка $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^m$ равна $||b-a|| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \cdots + (b_n-a_n)^2}$.

Пусть ℓ – кривая в $\mathbb{R}^m$, а $f : \mathbb{R} \to \ell$ – ее невырожденная параметризация. **Отрезком** s кривой ℓ называется образ отрезка $[t_0,t_e] \subseteq \mathbb{R}$ под действием f, т.е. $s = \{f(t)\,|\,t_0 \leqslant t \leqslant t_e\}$. Пусть $\sigma = \{t_0,\dots,t_n = t_e\}$ – разбиение отрезка $[t_0,t_e]$. Говорят, что ломаная $p = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1}\big[f(t_i), f(t_{i+1})\big]$ **вписана** в кривую ℓ (где $\big[f(t_i), f(t_{i+1})\big]$ обозначает отрезок в $\mathbb{R}^m$ с концами $f(t_i)$ и $f(t_{i+1})$, т.е. $\{f(t_i)\lambda + f(t_{i+1})(1-\lambda)\,|\,0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

Пусть $\Omega(\ell)$ – множество всех ломаных, вписанных в ℓ. **Длина кривой** ℓ тогда равна

$$d(\ell) = \lim_{\substack{p\in\Omega(\ell)\\ \Delta(\sigma)\to 0}} d(p)$$

Теорема 13.4. *Если f – гладкая невырожденная параметризация кривой ℓ, то*

$$d(\ell) = \int\limits_{t_0}^{t_e} \sqrt{f_1'(t)^2 + \cdots + f_m'(t)^2}\,dt$$

14. Численное интегрирование

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемая функция, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим: $h = \frac{b-a}{n}$ и рассмотрим разбиение $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, где $x_k = a + kh$.

14.1. Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.

(1) Левых (правых) прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + R_n(f) \qquad \Big(\text{соотв. } \int\limits_a^b f(x)\,dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + R_n(f)\Big)$$

(2) Средних прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\big) + R_n(f)$$

(3) Трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + R_n(f)$$

(4) Симпсона (парабол). Пусть $n = 2N$ – четно.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+f(x_n) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(x_{2k})\right) + R_n(f)$$

Предложение 14.2. *Формулы (1) точны для многочленов нулевой степени, формулы (2) и (3) – для многочленов 1-ой степени, а формула (4) – для кубических многочленов.*

Теорема 14.3. *Пусть $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Рассмотрим квадратурную формулу $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f(x_k) + R(f)$ Предположим, что она точна для всех многочленов степени не превосходящей m. Тогда для любой $m+1$ раз непрерывно дифференцируемой функции f существует число C такое, что:*

$$R(f) \leqslant C(b-a)^{m+1} \sup_{[a,b]} |f^{(m+1)}|$$

15. Несобственные интегралы

Определение 15.1. Пусть f – ограниченная числовая функция на луче $[a, +\infty)$ или $(-\infty, a]$. Тогда **несобственным интегралом по неограниченному промежутку** называется

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^a f(x)\,dx$$

Пусть теперь $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ такова, что $\lim\limits_{x\to a} = \infty$ или $\lim\limits_{x\to b} = \infty$. Тогда **несобственным интегралом от неограниченной функции** называется

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad \text{или} \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Если указанные пределы не существуют или бесконечны, то говорят, что интеграл **расходится**. В противном случае – интеграл **сходится**.

Точка, в которой функция f бесконечно большая, называется **особой точкой** интеграла. Также, особой точкой интеграла называется символ $+\infty$ или $-\infty$ в случае интеграла по неограниченному промежутку. Если интеграл имеет несколько особых точек, то промежуток интегрирования разбивается в объединение промежутков, каждый из которых содержит одну особую точку. В соответствии с этим интеграл разбивается в сумму интегралов, имеющих по одной особой точке. В этом случае считается, что интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится каждое слагемое.

Главным значением интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называется $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$. Аналогично, если при некотором $c \in [a, b]$ функция f ограничена на множестве $[a, c-\varepsilon] \cup [c+\varepsilon, b]$ при любом $\varepsilon > 0$, но $\lim\limits_{x\to c} = \infty$, то **главное значение** интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равно $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \big(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\big)$.

Примеры 15.2. (1) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

(2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$.

(3) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ сходится $\iff \alpha \geqslant 1$.

(4) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ сходится $\iff \alpha < 1$.

Предложение 15.3. (1) *Для несобственных интегралов выполнены свойства замены переменных и интегрирования по частям, заменяя в нужных местах значение функции на ее предел, если все возникающие пределы конечны.*

(2) *Если несобственный интеграл от $|f|$ сходится, то соответствующий интеграл от f также сходится. В этом случае говорят, что интеграл от f сходится абсолютно.*

(3) *Если $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при всех значениях x из промежутка интегрирования, то из сходимости интеграла от g следует сходимость интеграла от f.*

(4) *Если f и g – положительные эквивалентные между собой функции, то сходимость интеграла от f равносильна сходимости интеграла от g.*

Теорема 15.4. *Пусть $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ – положительная, монотонная функция. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_{x_0}^\infty f(x)\,dx$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=n_0}^\infty f(n)$.*

Определение 15.5. Пусть $f : [a, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ или $f : [a, \infty) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ **сходится равномерно** к функции $g(y)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $B > 0$ такое, что $|\int\limits_a^b f(x, y)\,dx - g(y)| < \varepsilon$ при всех зачениях y и всех $b > B$. Равномерная сходимость других видов несобственных интегралов определятся аналогично.

Теорема 15.6. *Предположим, что существует функция h одной переменной такая, что $|f(x, y)| \leqslant h(x)$ для любого значения y и любого $x \in [a, \infty)$, и интеграл $\int\limits_a^\infty h(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ равномерно абсолютно сходится.*

Теорема 15.7. *Предположим, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$ сходится равномерно. Тогда:*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx$$

и

$$\left(\int_a^\infty f(x, y)\,dx\right)'_y = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$$