КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР, (1997 Г.)

А.В.СТЕПАНОВ

Содержание

Часть 1. **ВВЕДЕНИЕ**

0.1. Математические утверждения: аксиома, определение, предложение, лемма, теорема.

0.2. Необходимость и достаточность.

1. Числа

1.1. Натуральные числа ($\mathbb{N}$). Принцип математической индукции, примеры.

1.2. Целые ($\mathbb{Z}$), рациональные числа ($\mathbb{Q}$).

Определение 1.3. Множество K с операциями сложения и умножения называется **полем**, если выполнены следующие аксиомы: для любых $a, b, c \in K$

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$
2) $a+b = b+a$
3) $\exists 0 \in K : 0+a = a$
4) $\forall a \in K \ \exists (-a) \in K : a+(-a) = 0$
5) $(ab)c = a(bc)$
6) $ab = ba$
7) $\exists 1 \in K \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a$
8) $\forall a \in K \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$
9) $(a+b)c = ac+bc$.

Определение 1.4. Отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется **отношением порядка**, если для любых $x, y.z \in X$ выполнены следующие аксиомы:

1) $x\mathcal{R}x$ (рефлексивность)
2) $x\mathcal{R}y \ \& \ y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ (симметричность)
3) $x\mathcal{R}y \ \& \ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (транзитивность).

Отношение порядка $\mathcal{R}$ называется **линейным порядком**, если

4) $\forall x, y \in X : \ x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$.

В этом случае множество X называется **линейно упорядоченным**.

Супремум и инфимум.

Определение 1.5. Пусть X – линейно упорядоченное множество с отношением $\geqslant$ и $Y \subseteq X$. Элемент $m \in X$ называется **верхней (нижней) границей** множества Y, если $m \geqslant y$ (соответственно $y \geqslant m$) для любого $y \in Y$.

Элемент $m \in X$ называется точной верхней (нижней) гранью множества Y, если он является верхней (нижней) границей этого множества и для любой другой верхней (нижней) границы m' выполнено неравенство $m' \geqslant m$ (соответственно $m \geqslant m'$). Точная верхняя грань обозначается $\sup Y$ или $\sup\limits_{y \in Y} y$ и по другому называется **супремумом** множества Y. Точная нижняя грань обозначается $\inf Y$ или $\inf\limits_{y \in Y} y$ и по другому называется **инфимумом** множества Y.

Определение 1.6. Подмножество Y линейно упорядоченного множества X называется **ограниченным сверху (снизу)**, если оно имеет (хотя бы одну) верхнюю (соответственно нижнюю) границу. Y называется **ограниченным**, если оно ограничено и сверху и снизу.

Определение 1.7. Поле K с отношением линейного порядка $\geqslant$ называется **упорядоченным полем**, если для любых $a, b, c \in K$ выполнены следующие аксиомы:

1) $a \geqslant b \Rightarrow a+c \geqslant b+c$
2) $a \geqslant b \ \& \ c \geqslant 0 \Rightarrow ac \geqslant bc$
3) $1 \geqslant 0$.

1.8. *Аксиома полноты.*

Пусть X – линейно упорядоченное множество. Оно называется **полным**, если выполнена следующая аксиома (аксиома полноты):

> Любое ограниченное сверху подмножество $Y \subseteq X$ имеет супремум и любое ограниченное снизу подмножество имеет инфимум.

Определение 1.9. Линейно упорядоченное поле K называется **архимедовым**, если выполнена следующая аксиома (**аксиома Архимеда**):

> $\forall a \in K\ \exists n \in \mathbb{N}:\ 1+1+\cdots+1 \geqslant a$, (в левой части последнего неравенства стоит сумма n экземпляров единицы поля K, см. аксиому1.3(7)).

Теорема 1.10. *Существует единственное (с точностью до обозначений) упорядоченное полное архимедово поле. Оно называется* **полем действительных чисел** *и обозначается* $\mathbb{R}$.

2. Функции, множества

Определение 2.1. **Прямым произведением** множеств $X \times Y$ называется множество пар $\{(x,y)|x \in X, y \in Y\}$.

Определение 2.2. **График функции** – это подмножество $\Gamma \subseteq X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$, для которого $(x,y) \in \Gamma$. Если Γ – график функции, то говорят, что задана **функция** $f : X \to Y$, и пишут $f(x) = y$ вместо $(x,y) \in \Gamma$.

Определение 2.3. **График отношения** на множестве X – это произвольное подмножество $\Gamma \subseteq X \times X$. Если Γ – график отношения, то говорят, что задано **отношение** $\mathcal{R}$ на X, и пишут $x\mathcal{R}y$ вместо $(x,y) \in \Gamma$.

Определение 2.4. Функция $f : X \to Y$ называется **инъективной**, если для любого $y \in Y$ найдется не более одного $x \in X$ такого, что $f(x) = y$. Другими словами, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Функция $f : X \to Y$ называется **сюръективной**, если для любого $y \in Y$ найдется хотя бы один $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.

Функция $f : X \to Y$ называется **биективной**, если она инъективна и сюръективна. Другими словами, f биективна, если уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение для любого $y \in Y$.

Определение 2.5. Если $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – функции, то их **композицией** называется функция $g \circ f : X \to Z$, заданная формулой $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, где $x \in X$.

Тождественная функция id: $X \to X$ задаваемая равенством $\mathrm{id}(x) = x$ играет роль единицы, т.е. нейтрального элемента по отношению к операции композиции функций.

Определение 2.6. Функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ называются **взаимно обратными**, если $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Пример 2.7. $f(x) = x^3$, $f(x) = a^x$, $f(x) = x^2$, определение обратных тригонометрических функций.

Определение 2.8. Множества X и Y называются **равномощными**, если существует биективная функция $f : X \to Y$. Множество называется **счетным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Теорема 2.9. $\mathbb{Q}$ – *счетно.* $\mathbb{R}$ – *несчетно.*

Без доказательства.

Часть 2. Теория пределов

3. Определение предела последовательности и функции одной переменной

3.1. Модуль разности – расстояние между точками на прямой. **Неравенство треугольника**: $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. **Окрестность точки** на прямой $V_\varepsilon(a)$ – это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Он задается неравенством $|x-a|<\varepsilon$ или, что равносильно, $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

Заметим, что числовая последовательность – это функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ или $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 3.2. Будем говорить, что f **стремится к** a **при** $x \to +\infty$ и писать $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $|f(x)-a| < \varepsilon$ при любом $x > N$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, если для любого $M \in \mathbb{R}$ существует такое N, что $|f(x)| > M$ (соответственно, $f(x) > M$, $f(x) < M$) при любом $x > N$.

В случае, если f – последовательность, x может стремиться только к $+\infty$. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то можно аналогично определить предел f при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$, заменяя неравенство $x > N$ на $x < N$ и $|x| > N$, соответственно.

Определение 3.3. Проколотой окрестностью точки a радиуса ε называется множество $V_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$. Она задается неравенствами $|x-a| < \varepsilon \;\&\; x \neq a$, и обозначается через $\mathring{V}_\varepsilon(a)$.

Пусть теперь $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 3.4. Будем говорить, что f **стремится к** a **при** $x \to u$ и писать $\lim\limits_{x\to u} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x)-a| < \varepsilon$ при любом $x \in \mathring{V}_\delta(u)$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, если для любого $M \in \mathbb{R}$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ (соответственно, $f(x) > M$, $f(x) < M$) при любом $x \in \mathring{V}_\delta(u)$.

Определение 3.5. Будем говорить, что f **стремится к** a **при** x **стремящимся к** u **справа** $(x \to u+0)$ и писать $\lim\limits_{x\to u+0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x)-a| < \varepsilon$ при любом $x \in (u, u+\delta)$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to u+0} f(x) = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, если для любого $M \in \mathbb{R}$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ (соответственно, $f(x) > M$, $f(x) < M$) при любом $x \in (u, u+\delta)$.

Аналогично определяются односторонние пределы слева $(\lim\limits_{x\to u-0} f(x))$.

Предложение 3.6. *Если предел последовательности или функции существует, то он определен однозначно.*

4. Непрерывность и точки разрыва

Определение 4.1. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **непрерывной** в точке u, если $\lim\limits_{x\to u} f(x) = f(u)$. Функция **неперывна справа**, если $\lim\limits_{x\to u+0} f(x) = f(u)$. Аналогично определяется непрерывность слева.

Предложение 4.2. *Элементарные функции непрерывны на своей области определения.*

Без доказательства.

4.3. *Примеры и классификация точек разрыва.*

1) Если существует $\lim\limits_{x\to u} f(x)$ не равный $f(u)$, то u называется **устранимой точкой разрыва**.

2) Если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to u+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to u-0} f(x)$, не равные между собой, то u называется точкой разрыва **конечного типа**.

3) Если односторонние пределы $\lim\limits_{x\to u+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to u-0} f(x)$ равны бесконечности, то u называется точкой разрыва **бесконечного типа**.
4) Если односторонние пределы при $x \to u$ не существуют, то мы будем называть u **плохой** точкой разрыва.

5. Простейшие свойства пределов

В этом параграфе мы будем говорить о свойствах предела функции, но все сказанное без каких-либо ограничений верно и для последовательностей. Будем считать, что $u \in \mathbb{R}$ или $u \in \{+\infty, -\infty, \infty\}$. Окрестностью точки $u = +\infty$ называется луч $(N, +\infty)$.

Определение 5.1. Функция называеся **бесконечно малой** (**бесконечно большой**) при $x \to u$, если $\lim\limits_{x\to u} f(x) = 0$ (соответственно, ∞).

Определение 5.2. Функция называется **ограниченной** на промежутке $D \subseteq \mathbb{R}$, если ее множество значений на этом промежутке ограничено, т.е. существует такое $M \in \mathbb{R}$, что $f(x) \leqslant M$ при любом $x \in D$.

Предложение 5.3. *Если функция (последовательность), имеет предел в точке u, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Предложение 5.4. *Если в некоторой окрестности точки u имеет место неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\lim\limits_{x\to u} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to u} g(x)$ (изначально предполагается, что оба этих предела существуют).*

Замечание 5.5. Даже если $f(x)$ строго меньше $g(x)$, то неравенство для пределов будет нестрогое.

Лемма 5.6. (о сжатой переменной). *Предположим, что для всех x из некоторой окрестности точки u выполнены неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и $\lim\limits_{x\to u} f(x) = \lim\limits_{x\to u} h(x) = a$. Тогда $\lim\limits_{x\to u} g(x)$ существует и равен a.*

Предложение 5.7. *Прозведение бесконечно малой на ограниченную является бесконечно малой.*

Предложение 5.8. (Замена переменной в пределе). *Предположим, что $g(x) \neq a$ при x из некотрой окрестности точки u. Если $g(x) \to a$ при $x \to u$, и $f(t) \to b$ при $t \to a$, то $\lim\limits_{x\to u} f(g(x)) = b$. В частности, знак неперывной функции можно переставлять со знаком lim, т.е. если f неперерывна в точке a, то $\lim\limits_{x\to u} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to u} g(x)\right)$.*

5.9. Сейчас мы докажем непрерывность на области определения функции $f(x) = \frac{1}{x}$, что понадобится нам при доказательстве формулы предел частного.

Доказательство. Пусть $u \neq 0$. Тогда при $x \in V_{\frac{|u|}{2}}(u)$

$$0 \leqslant |f(x) - f(u)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{u}| = \frac{|x-u|}{|x| \cdot |u|} \leqslant \frac{|x-u|}{\frac{1}{2}|u|^2} \xrightarrow[x\to u]{} 0$$

По теореме о сжатой переменной из этого следует, что $|f(x) - f(u)| \to 0$, т.е. $f(x) \to f(u)$ при $x \to u$. ☐

5.10. Арифметические операции с пределами.

Предположим, что существуют конечные пределы функций f и g при $x \to u$. Тогда:

$\lim\limits_{x\to u}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to u} f(x) + \lim\limits_{x\to u} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to u}\big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to u} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to u} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to u} f(x)}{\lim_{x\to u} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to u} g(x) \neq 0$.

5.11. *Правила бесконечной арифметики.*

Если пределы функций f и g при $x \to u$ существуют, но бесконечны, или предел знаменателя равен нулю, то в некоторых ситуациях можно сказать ответ независимо от конкретного вида функций f и g, а зная только пределы этих функций. Такие ситуации называются правилами бесконечной арифметики. Их мнемоническая запись приведена ниже. Также, в число правил бесконечной арифметики мы включим некоторые сведения о пределах элементарных функций на бесконечности.

$\frac{1}{0} = \infty.$
$\frac{1}{\infty} = 0.$
$const + \infty = \infty.$
$c\infty = \infty$, если $c \neq 0$.
$+\infty + (+\infty) = +\infty.$
$+\infty^\lambda = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \lambda > 0 \\ 0, & \text{если } \lambda < 0 \end{cases}$
$+0^\lambda = +\infty$, если $\lambda < 0$.
$c^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } c > 1 \\ 0, & \text{если } 0 < c < 1 \end{cases}$
$c^{-\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < c < 1 \\ 0, & \text{если } c > 1 \end{cases}$
$\ln(0) = -\infty.$
$\ln(+\infty) = +\infty.$
$\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}.$

Каждая из этих мнемонических записей на самом деле означает утверждение следующего вида: если $f \to \dots$ и $g \to \dots$, то $f * g \to \dots$ (здесь $*$ обозначает одно из арифметических действий или возведение в степень). Для примера сформулируем и докажем первое из правил.

Предложение 5.12. *Если $f(x) \to 1$, а $g(x) \to 0$ при $x \to u$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$.*

Доказательство. Для данного $M \in \mathbb{R}$ положим $N = \max(M, 2)$. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы $|f(x) - 1| < \frac{1}{N}$ при $x \in \overset{\circ}{V}_{\delta_1}(u)$, и $\delta_2 > 0$ так, чтобы $|g(x) - 0| < \frac{1}{2N}$ при $x \in \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(u)$. Выберем δ так, чтобы $\overset{\circ}{V}_\delta(u) = \overset{\circ}{V}_{\delta_1}(u) \cap \overset{\circ}{V}_{\delta_2}(u)$. Тогда при $x \in \overset{\circ}{V}_\delta(u)$ выполнены оба неравенства, откуда $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \geqslant \frac{1}{2}/\frac{1}{2N} = N \geqslant M$. А это и означает, что $\lim\limits_{x \to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. □

6. Свойства пределов и теоремы о непрерывных функциях, основанные на аксиоме полноты

Определение 6.1. Фунция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (или последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) называется возрастающей (убывающей), если $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$) при $x_1 < x_2$. Функция называется монотонной, если она возрастает или убывает.

Теорема 6.2. *Если функция или последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (соответственно, снизу) на промежутке $(N, +\infty)$, то она имеет предел при $x \to \infty$.*

Доказательство. Пусть f возрастает, и $a = \sup\limits_{x > N} f(x)$ (он существует по аксиоме полноты). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ число $a - \varepsilon$ не является верхней границей функции f, т.е. существует $x_0 > N$ такое, что $f(x_0) > a - \varepsilon$. По определению супремума и потому, что f возрастает, при любом $x > x_0$ верно неравенство $a - \varepsilon < f(x) < a$ откуда следует, что $|f(x) - a| < \varepsilon$. По определению предела это и означает, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$. □

Лемма 6.3 (О вложенных промежутках)**.** *Рассмотрим последовательность вложенных отрезков* $[a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq \dots \subseteq [a_n, b_n] \subseteq \dots$ *и предположим, что длина промежутка* $b_n - a_n$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$*. Тогда пересечение этих отрезков состоит ровно из одной точки, которая является общим пределом последовательностей* a_n *и* b_n*.*

Доказательство. По условию последовательность (a_n) возрастает и ограничена сверху (любым числом b_n). Поэтому она имеет предел $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Аналогично, существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Тогда $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = b - a$, откуда $a = b$. Нетрудно доказать, что это и есть единственная точка, лежащая в пересечении всех промежутков. $\square$

Теорема 6.4. *Пусть* f *непрерывна на* $[a, b]$, $f(a) = A$ *и* $f(b) = B$*. Тогда для любого* $C \in [A, B]$ *существует* $c \in [a, b]$ *такое, что* $f(c) = C$*.*

Замечание 6.5. Пусть $AB < 0$, а $C = 0$. Тогда метод приближенного нахождения корня функции f, основанный на доказательстве предыдущего утверждения, называется методом деления пополам.

Теорема 6.6. *Пусть* f *непрерывная функция на отрезке* $[a, b]$*. Тогда в какой-то точке отрезка функция достигает своего наибольшего значения, т.е. существует такая* $c \in [a, b]$*, что* $f(c) \geqslant f(x)$ *для любого* $x \in [a, b]$*. Аналогичное утверждение имеет место и про наименьшее значение* f *на* $[a, b]$*.*

Определение 6.7. Последовательность (x_n) называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $m, n > N$ выполнено неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Лемма 6.8. *Любая фундаментальная последовательность сходится.*

Доказательство. По предыдущему определению для каждого числа $\frac{1}{k}$ можно выбрать номер N_k, начиная с которого имеет место неравенство $|x_m - x_n| < \frac{1}{k}$. Положим $a_k = x_{N_{k+1}} - \frac{1}{k}$ и $b_k = x_{N_{k+1}} + \frac{1}{k}$ так, что $x_n \in [a_k, b_k]$ при $n > N_k$. Так как $b_k - a_k = \frac{2}{k} \to 0$ при $k \to \infty$, то по лемме о вложенных промежутках существует ровно одна точка, лежащая в пересечении $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Нетрудно показать (по определению предела), что она и является пределом последовательности (x_n). $\square$

7. Сравнение бесконечно малых

Определение 7.1. Функции f и g называются **эквивалентными** при $x \to u$ если $\lim\limits_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Это обозначается через $f(x) \underset{x\to u}{\sim} g(x)$.

7.2. Начиная с этого места, функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ по умолчанию считаются бесконечно малыми при $x \to 0$. Также, запись $\alpha(x - u)$ будет означать бесконечно малую при $x - u \to 0$, т.е. $x \to u$. Если $g(x)$ – бесконечно малая при $x \to u$, то выражение $\alpha(x - u)g(x)$ будет называться бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$.

Предложение 7.3. $f(x) \underset{x\to u}{\sim} g(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x) = g(x) + \alpha(x - u)g(x)$*.*

Предложение 7.4 (Замена на эквивалентную)**.** *Если* $f(x) \underset{x\to u}{\sim} g(x)$*, а* $f_1(x) \underset{x\to u}{\sim} g_1(x)$*, то*

$$\lim_{x\to u} \frac{f(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\to u} \frac{g(x)}{g_1(x)}.$$

8. Замечательные пределы

8.1. *Первый замечательный предел.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

8.2. Формула сложных процентов: $a_n=(1+\frac{a}{n})^n$.
Рассмотрим эту последовательность при $a=1$.

Теорема 8.3. *Последовательность $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ возрастает и ограничена сверху (например числом 3). Следовательно, она имеет конечный предел.*

Определение 8.4. $e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Следствие 8.5 (*Второй замечательный предел*)**.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

8.6. *Третий замечательный предел.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Лемма 8.7. *Пусть f и g – взаимно обратные функции. Если $f(x)\sim x$ при $x\to 0$, то и $g(x)\sim x$.*

8.8. *Четвертый замечательный предел.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

8.9. *Пятый замечательный предел.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

8.10. Цепочка эквивалентностей при $x\to 0$:

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\operatorname{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}$$

9. Предел функции нескольких переменных

Далее в курсе мы будем рассматривать **конечномерные** линейные пространства. Однако, бо́льшая часть формулировок (но не доказательств!) будет верна и для бесконечномерных пространств с необходимыми оговорками. Это одна из причин, почему я стараюсь давать формулировки в *инвариантной* форме (т.е. не в координатной форме – в форме, независимой от выбора базиса линейного пространсва). Дисциплины, которые занимаются случаем бесконечномерных пространств называются функциональным анализом и вариационным исчислением.

Определение 9.1. Пусть V – линейное пространство. Функция $\nu: V\to\mathbb{R}$ называется **нормой** на V, если она удовлетворяет следующим условиям. Если $u,v\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$, то:

1. $\nu(\lambda u)=|\lambda|\nu(u)$ (линейность);
2. $\nu(u+v)\leqslant\nu(u)+\nu(v)$ (неравенство треугольника);
3. $\nu(u)\geqslant 0$ (положительная определенность);
4. $\nu(u)=0\iff u=0$ (невырожденность).

Вместо $\nu(u)$ мы будем обычно писать $\|u\|$.

Пример 9.2. 1. Норма в $\mathbb{R}^n$ обычно задается равенством $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.
2. Если V – пространство непрерывных функций $[a,b]\to\mathbb{R}$, то можно задать норму формулой $\|f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.
3. Пусть U, V – произвольные нормированные линейные пространства, а $\mathrm{Hom}(U,V)$ – линейное пространство всех линейных отображений $U\to V$. Тогда $\|L\|=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|L(x)\|}{\|x\|}=\sup\limits_{\|x\|=1}\|L(x)\|$.
Сейчас мы докажем, что супремум в этом определении всегда существует и конечен в случае конечномерных пространств U и V. В случае бесконечномерных пространств для того, чтобы этот факт был выполнен, нужно слегка модифицировать определение пространства $\mathrm{Hom}(U,V)$.

Предложение 9.3. *Пусть $L \in \mathrm{Hom}(U,V)$, где U и V – конечномерные нормированные линейные пространства. Тогда множество $\{\|L(x)\| \bigm| \|x\| = 1\}$ ограничено сверху. Поэтому супремум в определении нормы оператора существует. Более того, оператор L непрерывен, как функция $U \to V$.*

Доказательство. Проведем доказательство только для случая $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$. Тогда можно считать, что L – оператор умножением на матрицу A размера $n \times m$. Обозначим через $a_1, \ldots, a_m$ столбцы матрицы A. Тогда, если $x \in U$ – вектор с координатами $x_1, \ldots, x_m$ с нормой 1, то $|x_i| \leqslant 1$, и значит

$$\|L(x)\| = \|Ax\| = \|\sum_{i=1}^m a_i x_i\| \leqslant \sum_{i=1}^m \|a_i\| \cdot |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^m \|a_i\| = M$$

Так как последнее выражение не зависит от x, то оно и есть верхняя граница для интересующего нас множества.

Далее, $0 \leqslant \|L(x) - L(u)\| = \|L(x-u)\| \leqslant \|L\| \cdot \|x-u\| \to 0$ при $x \to u$, что и означает, что L непрерывен. □

Определение 9.4. Пусть U, V – нормированные линейные пространства, $f : U \to V$, и $u \in U$. $\lim\limits_{x \to u} f(x) = v \in V$, если $\lim\limits_{\|x-u\| \to 0} \|f(x) - v\| = 0$. Другими словами, $\lim\limits_{x \to u} f(x) = v$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|x - u\| < \delta$ выполнено $\|f(x) - v\| < \varepsilon$.

Предложение 9.5. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, и существует $\lim\limits_{x \to u} f(x)$ равный v. Тогда*

$$\lim_{x_1 \to u_1} \Big(\lim_{x_2 \to u_2} f(x_1, x_2) \Big) = v$$

Замечание 9.6. Обратное неверно! Например, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Тогда повторный предел в точке $(0,0)$ существует и равен 0, в то время как на прямой $x = y$ функция тождественно равна 1, и, следовательно, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ не существует.

Теорема 9.7. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to V$ непрерывна в некоторой проколотой окрестности точки u. Тогда предел $f(x)$ при $x \to u$ существует и равен v тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t \to 0} f(u + tw) = v$ при любом $w \in U$.*

Без доказательства.

9.8. Определение непрерывности, свойства пределов и непрерывных функций аналогичны тем, что мы доказали для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Часть 3. **Дифференциальное исчисление**

10. Определение производной (общая конструкция)

10.1. Линейные операторы (повторение того, что было в линейной алгебре.)

Обозначим через $\mathrm{Hom}(U,V)$ линейное пространство всех линейных операторов $U \to V$.

Пусть U и V – конечномерны. Напомним, из курса линейной алгебры известно, что любой линейный оператор в фиксированных базисах пространств U и V является оператором умножения на матрицу. Это записывают в виде $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$. В частности, $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

Напомним договоренность пункта 7.2 главы 1: $\alpha(x - u)$ обозначает бесконечно малую при $x \to u$.

Определение 10.2. Пусть U, V – нормированные линейные пространства, $u \in U$, и $f : U \to V$. Предположим, что существует линейный оператор $L : U \to V$ такой, что

$$f(x) = f(u) + L(x-u) + \alpha(x-u)\|x-u\|$$

Тогда говорят, что функция f дифференцируема в точке u. При этом L называется **(полным) дифференциалом** функции f в точке u и обозначается через $df(u)$.

10.3. В случае $U = V = \mathbb{R}$ любое линейное отображение (например, $df(u)$) – это умножение на число. Это число и называется **производной функции f в точке** u. Оно обозначается через $f'(u)$. Связь дифференциала функции и ее производной может быть выражена формулой $df(u)(\Delta x) = f'(u) \cdot \Delta x$. В физике, технике и во многих математических учебниках символ df_u или даже просто df по умолчанию означает $df(u)(dx)$, где dx – "приращение аргумента". Отсюда формула $df = f'(x)dx$, которой строгий математический смысл можно придать, пожалуй, только в рамках нестандартного анализа.

Предложение 10.4. *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то $f'(u) = \lim\limits_{x \to u} \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$.*

10.5. Рассмотрим теперь случай функции $f : U = \mathbb{R}^m \to V = \mathbb{R}^n$. **Полной производной** такой функции в точке $u \in \mathbb{R}^m$ называется матрица оператора $df(u)$ в стандартных базисах пространств $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$.

10.6. Если $f : U = \mathbb{R}^m \to V = \mathbb{R}^n$ и $x \in U$, то значение $f(x)$ – это столбец $(f_1(x), \ldots, f_m(x))^T$. В этом случае функции $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называются **координатными функциями** функции f. Производная k-ой координатной функции в точке $u \in \mathbb{R}^m$ – это строка, которая, как легко видеть, совпадает с k-ой строкой матрицы $f'(u)$. Следующее определение говорит о том, из чего обычно состоит эта строка (см. предложение 10.10 ниже).

Определение 10.7. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – скалярная функция n переменных. **Частной производной** по i-ой переменной в точке $u = (u_1, \ldots, u_m)$ функции f ($D_i f(u)$ или $\frac{\partial f}{\partial x_i}(u)$) называется производная функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке u_i, где g задана равенством $g(x) = f(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{x+1}, \ldots, u_m)$.

Предложение 10.8. *Если f дифференцируема в точке U, то дифференциал $df(u)$ определяется единственным образом.*

Доказательство. Пусть L_1, L_2 – различные линейные операторы, удовлетворяющие условию последнего определения, и $L = L_1 - L_2$. Тогда $\lim\limits_{x \to u} L\left(\frac{x-u}{\|x-u\|}\right) = 0$. Другими словами, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x - u\| < \delta \Rightarrow \|L\left(\frac{x-u}{\|x-u\|}\right)\| < \varepsilon$. Предположим, что $L(y) \neq 0$ для некоторого $y \in U$. Положим $\varepsilon = \frac{\|L(y)\|}{2\|y\|}$ и выберем δ по этому ε. Положим $x = u + \frac{\delta}{2\|y\|}y$. Тогда $\|x - u\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но $\|L\left(\frac{x-u}{\|x-u\|}\right)\| = \frac{\|L(y)\|}{\|y\|} = 2\varepsilon > \varepsilon$, что противоречит выбору δ. $\square$

10.9. В соответствии с последним предложением, для фиксированной функции $f : U \to V$ отображение $u \mapsto df(u)$ определяет функцию $df : U \to \mathrm{Hom}(U, V)$. В случае $U = V = \mathbb{R}$ или $U = \mathbb{R}^m$, $V = \mathbb{R}^n$, используя отождествления $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ и $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{R})$ мы получаем отображения $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^m \to \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{R})$, соответственно.

Предложение 10.10. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, и $r > 0$. Предположим, что все частные производные координатных функций $D_i f_j(u)$ существуют и непрерывны в окрестности $V_r(u)$ точки u. Тогда матрица $f'(u)$ состоит из частных производных $D_i f_j(u)$ (т.е. $f'(u)_{ij} = D_i f_j(u)$).*

Доказательство. Разберем сначала случай $n = 1$. Нам надо доказать, что

$$\lim_{x \to u} \frac{\left| f(x) - f(u) - \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(u)(x_k - u_k) \right|}{\|x - u\|} = 0 \qquad \star$$

Заметим, что $|x_k - u_k| \leqslant \|x - u\|$, и, следовательно, $x_k \to u_k$ при $x \to u$. Преобразуем левую часть формулы $\star$. Она равна

$$\lim_{x\to u}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left|f(u_1,\ldots,u_{k-1},x_k,\ldots,x_m)-f(u_1,\ldots,u_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)(x_k-u_k)\right|}{\|x-u\|}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{x\to u}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left|f(u_1,\ldots,u_{k-1},x_k,\ldots,x_m)-f(u_1,\ldots,u_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)(x_k-u_k)\right|}{|x_k-u_k|}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{x\to u}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(u_1,\ldots,u_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(u)\right|=0\,,$$

что и требовалось.

Вернемся к общему случаю. Заметим, что для любого $z\in\mathbb{R}^n$ норма z не превосходит суммы модулей его координат. Из этого следует, что

$$\frac{\|f(x)-f(u)-f'(u)(x-u)\|}{\|x-u\|}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|f_j(x)-f_j(u)-\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(u)(x_k-u_k)\right|}{\|x-u\|}$$

Но по доказанному выше каждое слагаемое этой суммы стремится к нулю, что завершает доказательство. □

11. Простейшие свойства производной

Предложение 11.1. *Если функция $f:U\to V$ дифференцируема в точке u, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. По определению дифференциала $f(x)-f(u)=df(u)(x-u)+\alpha(x-u)\|x-u\|$. Поэтому

$$0\leqslant\lim_{x\to u}\|f(x)-f(u)\|\leqslant\lim_{x\to u}\big(\|df(u)(x-u)\|+\|\alpha(x-u)\|\cdot\|x-u\|\big)=0$$

что и требовалось доказать (равенство $\lim\limits_{x\to u}\|df(u)(x-u)\|=0$ следует из 9.3 главы 1 для конечномерных пространств U и V; в случае бесконечномерных пространств оно вообще говоря неверно, см. гл.1, 9.2(3)). □

Предложение 11.2. $d(f+g)=df+dg$, $d(\lambda f)=\lambda df$. *Аналогичные свойства выполнены для производных.*

Предложение 11.3. *Пусть $f,g:U\to\mathbb{R}$, и $u,\Delta x\in U$. Тогда $d(fg)(u)(\Delta x)=df(u)(\Delta x)\cdot g(u)+f(u)\cdot dg(u)(\Delta x)$. Если $U=\mathbb{R}^m$, то $(fg)'=f'g+gf'$.*

Предложение 11.4. *Пусть $g:U\to V$, $f:V\to W$, и $u\in U$. Тогда $d(f\circ g)(u)=df(g(u))\circ dg(u)$. Если $U=\mathbb{R}^m$, $V=\mathbb{R}^n$, а $W=\mathbb{R}^k$, то последнее равенство можно переписать в виде $(f\circ g)'(u)=f'(g(u))\cdot g'(u)$ (здесь в левой части стоит матрица размера $k\times m$, а в правой – произведение матриц размеров $k\times n$ и $n\times m$. При $k=1$ в координатной форме это равенство будет выглядеть так:*

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_j}(g(u))\cdot\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(u)$$

для любого $i=1,\ldots,m$ (здесь $x=(x_1,\ldots,x_m)^T$ – столбец переменных в пространстве $U=\mathbb{R}^m$, а $y=(y_1,\ldots,y_n)^T$ – в пространстве $V=\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Обозначим через A линейный опрератор $df(g(u)) : V \to W$, а через B – оператор $dg(u) : U \to V$. Обозначим через Δx приращение аргумента и рассмотрим приращение функции $f \circ g$ и воспользуемся определением дифференциала для функций f и g в точках $g(u)$ и u, соответственно:

$$\begin{aligned}
&f(g(u+\Delta x)) - f(g(u)) = \\
=&A\big(g(u+\Delta x) - g(u)\big) + \alpha\big(g(u+\Delta x) - g(u)\big) \cdot \|g(u+\Delta x) - g(u)\| = \\
=&A\big(B(\Delta x) + \beta(\Delta x)\|\Delta x\|\big) + \alpha\big(g(u+\Delta x) - g(u)\big) \cdot \big|\big|B(\Delta x) + \beta(\Delta x)\|\Delta x\|\,\big|\big| = \\
=&A\big(B(\Delta x)\big) + \Big(A\big(\beta(\Delta x)\big) + \alpha\big(g(u+\Delta x) - g(u)\big) \cdot \|B\big(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\big) + \beta(\Delta x)\|\Big) \cdot \|\Delta x\|
\end{aligned}$$

Теперь по определению дифференциала функции $f \circ g$ осталось доказать, что выражение в больших скобках стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Так как любой линейный оператор непрерывен, а $\beta(\Delta x) \to 0$, то $A\big(\beta(\Delta x)\big) \to A(0) = 0$. По непрерывности функции g ее приращение $g(u+\Delta x) - g(u) \to 0$, а так как α – бесконечно малая, то $\alpha\big(g(u+\Delta x) - g(u)\big) \to 0$. Оставшееся выражение под знаком нормы ограничено (первое слагаемое ограничено нормой оператора B, а второе – бесконечно малое). Это завершает доказательство. □

Теорема 11.5. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $u \in U$. Если $\det f'(u) \neq 0$, то существует окрестности $V_\varepsilon(u)$ и $V_\delta\big(f(u)\big)$ и непрерывно дифференцируемая функция $g : V_\delta\big(f(u)\big) \to V_\varepsilon(u)$, являющаяся обратной к f на $V_\varepsilon(u)$. Кроме того, $f'(u) = g'\big(f(u)\big)^{-1}$.*

Доказательство. Принимаем без доказательства существование функции g, обратной к f. По определению обратной функции $g\big(f(x)\big) = x$. Дифференцируя последнее равенство в точке u получаем $g'\big(f(u)\big)f'(u) = E$, откуда и следует требуемое соотноение для производных. □

Предложение 11.6. *Если $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.*

12. Необходимое условие экстремума. Французские теоремы. Правило Лопиталя

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$.

Определение 12.1. Точка $u \in U$ называется точкой **локального минимума (максимума)** функции f, если существует такая окрестность этой точки, что при любом x из этой окрестности $f(u) \leqslant f(x)$ (соответственно, $f(u) \geqslant f(x)$). **Экстремум** функции – это точка локального минимума или максимума.

Теорема 12.2 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть $\theta \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке θ и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда $df(\theta) = 0$.*

Доказательство. Проведем доказательство в случае локального максимума в точке θ. По определению производной в точке θ

$$f(x) - f(\theta) = df(\theta)(x-\theta) + \alpha(x-\theta)\|x-\theta\|$$

Положим $x = \theta + \lambda v$ и заметим, что по предположению $f(x) - f(\theta) \leqslant 0$ при любом $x \in V(\theta)$. Получаем:

$$df(\theta)(\lambda v) + \alpha(\lambda v)|\lambda| \cdot \|v\| \leqslant 0$$

при достаточно маленьких λ. Поделив на $|\lambda|$ и устремив λ к нулю получим $\pm df(\theta)(v) \leqslant 0$, где плюс или минус выбирается в зависимости от знака λ. Отсюда следует, что $df(\theta)(v) = 0$ для любого $v \in U$, а это и означает, что $df(\theta) = 0$. □

Замечание 12.3. В случае $U = \mathbb{R}^m$ заключение теоремы означает, что все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ равны нулю.

Теперь мы докажем несколько утверждений про функции одной переменной $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, дифференцируемые на (a, b) и непрерывные на $[a, b]$.

Теорема 12.4 (Ролля)**.** *Если $f(a) = f(b)$, то существует $\theta \in (a, b)$ такая, что $f'(\theta) = 0$ (т.е. касательная к графику горизонтальна).*

Доказательство. По теореме 6.6 f принимает свои наибольшее и наименьшее значения на $[a, b]$. Так как $f(a) = f(b)$, то либо наименьшее либо наибольшее значение принимается внутри отрезка. Теперь утверждение следует из предыдущей теоремы. □

Теорема 12.5 (Лагранжа)**.** *Существует $\theta \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$.*

Геометрическая интерпритация.

Доказательство. Применить теорему Ролля к функции $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. □

Теорема 12.6 (Коши)**.** *Существует $\theta \in (a, b)$ такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$.*

Доказательство. Применить теорему Ролля к функции $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$. □

Будем считать, что a или b может быть равно ∞.

Теорема 12.7 (Правило Лопиталя)**.** *Пусть $u \in [a, b]$ (не исключая возможности $u = \infty$). Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(a) *f и g бесконечно малые при $x \to u$;*
(b) *f и g бесконечно большие при $x \to u$;*

и существует предел $\lim\limits_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ равный c. Тогда $\lim\limits_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = c$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathbb{R}$, и f и g бесконечно малые при $x \to u$. Так как f, g дифференцируемы в точке u, то они непрерывны в этой точке, что по определению означает, что $f(u) = g(u) = 0$. Тогда по теореме Коши $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$ для некоторой $\theta = \theta(x) \in (u, x)$. При $x \to u$ по лемме о сжатой переменной $\theta(x) \to u$, откуда по непрерывности f имеем $\lim\limits_{x\to u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

В случае $u = \infty$ сделаем замену переменных в пределе $y = \frac{1}{x}$. Получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})}{g(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

В случае (b), т.е. если обе функции стремятся к бесконечности, надо заменить их отношение на отношение $\frac{1/g(x)}{1/f(x)}$, в котором числитель и знаменатель стремятся к 0. □

13. Производные высших порядков и формула Тэйлора

Как мы уже выяснили, для функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ее производная определяет функцию $f' : \mathbb{R}^m \to \mathrm{M}(n \times m, \mathbb{R})$. Для того, чтобы определить производную от производной, мы должны ввести норму на пространстве $\mathrm{M}(n \times m, \mathbb{R})$. Существует канонический способ ввести норму на пространстве $\mathrm{Hom}(U, V)$ для произвольных нормированных линейных пространств U и V, как это сделано в примере 9.2(3) главы 1. Этим определением мы и будем пользоваться далее.

На самом деле, следующая теорема показывает, что нет никакой разницы, как ввести норму в интересующей нас ситуации (когда U, V и, следовательно, $\mathrm{Hom}(U, V)$ – конечномерны).

Теорема 13.1. *Любая норма на фиксированном конечномерном линейном пространстве V приводит к одной и той же теории пределов, т.е. для любого нормированного линейного пространства U и для любой функции $f : U \to V$, равенство $\lim\limits_{x\to u} f(x) = v$ не зависит от того, какая норма на V использовалась при определении этого предела.*

Без доказательства.

13.2. Для того, чтобы выяснить, как представлять себе вторую производную функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, вспомним, что первая производная имеет координатные функции $f'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Полная производная каждой координатной функции – это строка $(\frac{\partial f'_{ij}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f'_{ij}}{\partial x_m})$. Таким образом, полная вторая производная в точке $f''(u)$ – это “трехмерная матрица”, т.е. набор чисел, индексированный тремя индексами: $f''_{ijk}(u) = \frac{\partial f'_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \;/\; \partial x_k$. Последнее обычно обозначается через $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$. Произведением такой трехмерной матрицы на столбец $y \in \mathbb{R}^m$ является обычная матрица, у которой в позиции (i,j) стоит элемент $\sum\limits_{k=1}^{m} f''_{ijk}(u) y_k$. При умножении полученной матрицы на столбец $z \in \mathbb{R}^m$ мы получим столбец высоты n. Таким образом, можно считать, что трехмерная матрица $f''(u)$ сопоставляет паре векторов $(y,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ вектор из $\mathbb{R}^n$. В общем виде это можно сформулировать так.

Предложение 13.3. *Если U, V – линейные пространства, то $\mathrm{Hom}\big(U, \mathrm{Hom}(U,V)\big)$ изоморфно пространству билинейных отображений из $U \times U$ в V.*

Доказательство очевидно.

Определение 13.4. Вторым дифференциалом функции $f : U \to V$ в точке $u \in U$ называется билинейное отображение $d^2 f(u) : U \times U \to V$ удовлетворяющее условию

$$df(u + \Delta x)(y) = df(u)(y) + d^2 f(u)(\Delta x, y) + \alpha(\Delta x)\|\Delta x\|,$$

для любого $y \in U$. Другими словами, $d^2 f(u)$ – это дифференциал от функции $df : U \to \mathrm{Hom}(U,V)$ в точке u, рассмотренный как билинейное отображение $U \times U \to V$, в соответствии с предыдущим предложением. n-ный дифференциал $d^n f(u)$ – это полилинейное отображение $U \times U \times \dots \times U \to V$, определяемое аналогично.

13.5. Рассмотрим теперь более внимательно случай скалярной функции f от m переменных. В этом случае f'' имеет размер $1 \times m \times m$, поэтому ее можно отождествить с квадратной матрицей размера $m \times m$, состоящей из вторых частных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, где $j, k = 1, \dots, m$. В соответствии с правилом умножения трехмерных матриц на столбцы мы получаем

$$(f''(u)y)z = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(u) y_k z_j,$$

что в матричной записи дает $z^T f''(u) y$, и является значением второго дифференциала в точке (y,z).

Теорема 13.6. *Пусть $u, x, y \in U$, и $f : U \to V$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки u. Тогда $d^2 f(u)(x,y) = d^2 f(u)(y,x)$. В частности, вторые частные производные не зависят от порядка дифференцирования, т.е. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Доказательство этой теоремы будет дано после формулы Тэйлора. Начнем с доказательства формулы Тэйлора для функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Лемма 13.7. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема $n+1$ раз на (a,b), и $u, x \in (a,b)$. Если $f(u) = f'(u) = \dots = f^{(n)}(u) = 0$, то существует $\theta \in (u,x)$ такое, что $f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)(x-u)^{(n+1)}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = (x-u)^{n+1}$ и заметим, что $g(u) = g'(u) = \dots = g^{(n)}(u) = 0$, а $g^{(n+1)} \equiv (n+1)!$. По теореме Коши 12.6

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} = \frac{f'(\xi_1)-f'(u)}{g'(\xi_1)-g'(u)} = \dots = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

Положив $\theta = \xi_{n+1}$, получаем $\frac{f(x)}{(x-u)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$. □

Теорема 13.8. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема $n+1$ раз на (a,b), и $u, x \in (a,b)$. Тогда существует $\theta \in (u,x)$ (зависящее от u, x, n) такое, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)(x-u)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)(x-u)^{(n+1)}.$$

Доказательство. Проверить, что функция $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)(x-u)^k$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы. □

Следующая теорема относится к случаю скалярной функции векторного аргумента.

Теорема 13.9. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ дифференцируема $n+1$ раз в окрестности $V(u)$ точки $u \in U$, и $x \in V(u)$. Тогда существует $\theta \in (u,x)$ (зависящее от u, x, n) такое, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(u)(x-u, \dots, x-u) + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(\theta)(x-u, \dots, x-u).$$

Доказательство. Обозначим $\vartriangle x = x - u$, и рассмотрим вспомогательную функцию $g(t) = f(u + \vartriangle x t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Заметим, что по правилу дифференцирования сложной функции

$$g'(t) = df(u + \vartriangle x t)(\vartriangle x), \dots, g^{(k)}(t) = d^k f(u + \vartriangle x t)(\vartriangle x, \dots, \vartriangle x), \dots$$

Теперь утверждение теоремы следует из формулы Тэйлора для функции g в окрестности нуля. □

Теорема 13.10. *Пусть теперь $f : U \to \mathbb{R}^m$, n раз непрерывно дифференцируема в окрестности $V(u)$ точки $u \in U$, и $x \in V(u)$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(u)(x-u, \dots, x-u) + \alpha(x-u)\|x-u\|^n$$

Доказательство. Мы докажем это утверждение только в случае $(n+1)$ раз дифференцируемых функций. Если $m = 1$, то учитывая предыдущую теорему нам достаточно доказать, что

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(\theta)(x-u, \dots, x-u)}{\|x-u\|^n} \xrightarrow[x \to u]{} 0$$

Но, по определению нормы оператора, это выражение не превосходит

$$\frac{1}{(n+1)!} \|d^{(n+1)} f(\theta)\| \cdot \|x-u\|,$$

что очевидно является бесконечно малой. □

Доказательство теоремы 13.6. Рассмотрим выражение

$$g = \big(f(u + \varepsilon x + \delta y) - f(u + \varepsilon x)\big) - \big(f(u + \delta y) - f(u)\big)$$

По формуле Тэйлора для функции f в окрестностях точек u и $u + \varepsilon x$, при достаточно маленьких ε, δ имеет место равенство

$$\begin{aligned}g &= df(u+\varepsilon x)(\delta y) - df(u)(\delta y) + d^2f(u+\varepsilon x)(\delta y, \delta y) - d^2f(u)(\delta y, \delta y) = \\ &= \delta\big(df(u+\varepsilon x) - df(u)\big)(y) + d^2f(u+\varepsilon x)(\delta y, \delta y) - d^2f(u)(\delta y, \delta y) = \\ &= \delta\big(d^2f(u)(\varepsilon x, y) + \alpha(\varepsilon x)|\varepsilon| \cdot \|x\|\big) + d^2f(u+\varepsilon x)(\delta y, \delta y) - d^2f(u)(\delta y, \delta y)\end{aligned}$$

Аналогично, меняя местами слагаемые в выражении g, получим

$$g = \varepsilon\big(d^2f(u)(\delta y, x) + \beta(\delta y)|\delta| \cdot \|y\|\big) + d^2f(u+\delta y)(\varepsilon x, \varepsilon x) - d^2f(u)(\varepsilon x, \varepsilon x)$$

Положим $\delta = \varepsilon$, приравняем полученные выражения для g и сократим на ε^2. Имеем:

$$\begin{aligned}&d^2f(u)(x,y) \pm \alpha(\varepsilon x)\|x\| + d^2f(u+\varepsilon x)(y,y) - d^2f(u)(y,y) = \\ =&d^2f(u)(y,x) \pm \beta(\varepsilon y)\|y\| + d^2f(u+\varepsilon y)(x,x) - d^2f(u)(x,x)\end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha, \beta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а d^2f непрерывен, при $\varepsilon \to 0$ получаем $d^2f(u)(x,y) = d^2f(u)(y,x)$.

Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, то доказанное равенство можно переписать так: $y^T f''(u)x = x^T f''(u)y$. Полагая $x = e_i$, $y = e_j$, получаем $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, что завершает доказательство. □

14. Таблица производных

14.1. $(x^n)' = n\left(x^{n-1}\right)$.

Доказательство. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = x^{n-1} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x / x} = nx^{n-1}$. □

14.2. $(a^x)' = a^x \ln a$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a = e$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

В общем случае заметим, что $a^x = e^{x \ln a}$, и воспользуемся формулой для производной сложной функции. □

14.3. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x$. □

14.4. $(\cos x)' = -sinx$.

Доказательство. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Далее воспользуемся формулой производной сложной функции. □

14.5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

14.6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$.

Далее все доказательства проходят через формулу для производной обратной функции 11.5.

14.7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

14.8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14.9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14.10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

14.11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Следующая формула обобщает формулы 14.1 и 14.2.

14.12. $(f^g)' = f^g\left(g'\ln f + \frac{gf'}{f}\right)$.

Доказательство. Пусть функции $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ заданы равенствами $G(x) = \big(f(x), g(x)\big)^T$ и $F(u,v) = u^v$. Тогда $F\big(G(x)\big) = f(x)^{g(x)}$. По формуле производной сложной функции:

$$\big(f(x)^{g(x)}\big)' = \Big(F\big(G(x)\big)\Big)' = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\right)\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x)\end{pmatrix} =$$

$$= vu^{v-1}f'(x) + u^v \ln u g'(x)\Big|_{\begin{cases} u=f(x) \\ v=g(x)\end{cases}} = f(x)^g(x)\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

□

15. Монотонность. Достаточные условия экстремума

Предложение 15.1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b). Если $f'(x) > 0$ при любом $x \in (a,b)$, то f строго возрастает на (a,b). Если $f'(x) < 0$ при любом $x \in (a,b)$, то f строго убывает на (a,b). Аналогичные утверждения имеют место для нестрогих неравенств и нестрогой монотонности.*

Доказательство. Предположим, что $f'(x) > 0$, но f не является строго возрастающей. Тогда существуют $c < d \in (a,b)$ такие, что $f(c) \geqslant f(d)$. Но по теореме Лагранжа найдется $u \in (c,d)$ такая, что $f'(u) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leqslant 0$ – противоречие. Оставшиеся три факта доказываются аналогично. □

Следствие 15.2. *Пусть $c \in (a,b)$. Если $f'(x) \geqslant 0$ при $x \in (a,c)$, и $f'(x) \leqslant 0$ при $x \in (c,b)$, то c – точка локального максимума. Аналогичное утверждение имеет место для локального минимума.*

Теорема 15.3. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки c, и $f'(c) = 0$. Если $f''(c) > 0$, то c – точка локального минимума; если $f''(c) < 0$, то c – точка локального максимума.*

Заметим, что в теореме ничего не говорится о случае $f''(c) = 0$. Действительно, в этом случае необходимо дополнительное исследование. Эта теорема вытекает из аналогичного факта для функций нескольких переменных, которую мы сейчас сформулируем и докажем.

15.4. Пусть U – нормированное конечномерное линейное пространство. Напомним, что второй дифференциал функции $f : U \to \mathbb{R}$ в точке $u \in U$ – это симметричная билинейная форма. Рассмотрим соответсвующую ей квадратичную форму из U в R, которая вектору $\Delta x \in U$ сопоставляет число $d^2 f(u)(\Delta x, \Delta x)$. Она называется квадратичной формой второго дифференциала. Если $U = \mathbb{R}^m$, то

$$d^2 f(u)(\Delta x, \Delta x) = \Delta x^T f''(u)\Delta x = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\Delta x_i \Delta x_j.$$

Напомним, что квадратичная форма Q называется положительно определенной, если $Q(x) > 0$ при любом $x \neq 0$; отрицательно определенной, если $Q(x) < 0$ при любом $x \neq 0$; и вырожденной, если $Q(x) = 0$ при некотором $x \neq 0$.

Лемма 15.5. *Если Q положительно или отрицательно определенная квадратичная форма на конечномерном пространстве U, то $\inf\limits_{x\neq 0} \frac{|Q(x)|}{\|x\|^2} > 0$.*

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно, что любая квадратичная форма ортогональным преобразованием приводится к виду $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2$, где коэффициентами являются собственные числа матрицы этой формы. Очевидно, что форма положительно или отрицательно определена, если все λ_i имеют один знак. Так как в условии стоит модуль Q, можно считать, что все $\lambda_i > 0$. Пусть λ_k – наименьшее из λ_i. Тогда

$$\frac{|Q(x)|}{\|x\|^2} = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2}{x_1^2 + \dots + x_m^2} \geqslant \lambda_k$$

Если x – k-ый базисный вектор (т.е. $x_k = 1$, $x_i = 0$ при $i \neq k$), то последнее неравенство превращается в равенство. Таким образом, $\inf\limits_{x \neq 0} \frac{|Q(x)|}{\|x\|^2} = \lambda_k > 0$. □

Теорема 15.6. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки u, и $df(u) = 0$. Если квадратичная форма второго дифференциала в точке u положительна определена, то u – точка локального минимума; если она отрицательна определена, то u – точка локального максимума.*

Доказательство. Предположим, что квадратичная форма $d^2 f$ положительно определена. Пусть $\lambda = \inf\limits_{x \neq 0} \frac{d^2 f(u)(x-u, x-u)}{\|x\|^2} > 0$. По формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Пеано 13.10

$$f(x) - f(u) = \frac{1}{2} d^2 f(u)(x-u, x-u) + \alpha(x-u)\|x-u\|^2 \geqslant \left(\frac{\lambda}{2} + \alpha(x-u)\right)\|x-u\|^2$$

Так как $\alpha(x-u) \to 0$ при $x \to u$, то существует $\delta > 0$ такое, что $\frac{\lambda}{2} + \alpha(x-u) > 0$ при $x \in V_\delta(u)$. Таким образом, при $x \in V_\delta(u)$ мы доказали, что $f(x) > f(u)$, что и означает, что u – локальный минимум. □

16. Способы задания кривых

16.1. Кривой называется образ промежутка под действием непрерывной вектор-функции одной переменной (см. 16.4 ниже). Мы расмотрим только плоские *гладкие кривые*, т.е. те, которые задаются дифференцируемыми функциями f такими, что $f'(t)$ не обращается в 0. Для любой точки P гладкой кривой существует ее окрестность на кривой, которая является графиком некоторой функции (быть может из Oy в Ox). Когда мы будем говорить о производной в точке P, мы будем иметь ввиду производную этой функции. Все функции в этом разделе считаются нужное количество раз дифференцируемыми.

Рассмотрим следующие способы задания кривых.

16.2. *Явное задание.* Кривая задается, как график функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

16.3. *Неявное задание.* Если $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, то кривую можно задать, как множество точек, удовлетворяющих уравнению $f(x, y) = 0$. (Но даже если f дифференцируема, кривая не обязана быть гладкой !) Если в окрестности некоторой точки кривой (x_0, y_0) кривая задается явно, скажем, уравнением $y = \varphi(x)$, то в этой окрестности $f\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$. Дифференцируя последнее равенство получим $D_1 f + D_2 f \cdot \varphi' = 0$, откуда $\varphi' = -D_1 f / D_2 f$, или в других обозначениях $y'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$.

16.4. *Параметричесое задание.* Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, то кривую можно задать, как образ этой функции. В этом случае переменную обычно обозначают буквой t, а координатные функции – $X(t)$, $Y(t)$. В этих обозначениях определение можно переформулировать так: точка (x_0, y_0) лежит на кривой в том и только том случае, если существует t_0 такое, что $X(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$. Такое задание функции обычно записывается в виде

$$\begin{cases} x = X(T) \\ y = Y(t) \end{cases}$$

Для любого t_0 одна из координатных функций (скажем $X(t)$) имеет обратную в некоторой окрестности t_0 (потому что $X'(t_0)$ или $Y'(t_0)$ не равно 0). Обозначим ее через ψ. Тогда $x = X(t) \iff t = \psi(x)$, откуда $y = Y\big(\psi(x)\big) = \theta(x)$ – явное задание кривой. Производная

$$\theta'(x) = Y'\big(\psi(x)\big)\psi'(x) = \frac{Y'\big(\psi(x)\big)}{X'\big(\psi(x)\big)}$$

снова может быть задана параметрически формулами

$$\begin{cases} x = X(t) \\ y = \frac{Y'(t)}{X'(t)} \end{cases}$$

Обратите внимание, что вторая производная $\theta''(x)$ тогда задана равенствами

$$\begin{cases} x = X(t) \\ y = \frac{\big(Y'(t)/X'(t)\big)'}{X'(t)} = \frac{Y''(t)X'(t)-Y'(t)X''(t)}{X'(t)^3} \end{cases}$$

16.5. *Задание в полярных координатах.* Каждой точке координатной плоскости сопоставляется пара чисел (r, φ), где r – расстояние от точки до начала координат, а φ – угол (с учетом знака) между положительным направлением оси (Ox) и направленим на точку. Эта пара называеся **полярными координатами** точки, при этом r называется полярным радиусом, а φ – полярным углом. Если ρ – функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то множество точек, полярные координаты которых удоветворяют уравнению $r = \rho(\varphi)$, образует кривую. В этом случае говорят, что кривая задана в полярных координатах. Заметим, что φ может меняться на всей действительной прямой. Учитывая очевидные соотношения между полярными и Декартовыми координатами точки, кривую, заданную в полярных координатах, можно задать параметрически формулами

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

17. Исследование плоских кривых

Будем считать, что кривая задана параметрически (как ей и положено быть заданной в соответствии с нашим определением). Заметим, что явное задание и задание в полярных координатах легко переводятся в параметрическое.

Определение 17.1. Прямая l называется **асимптотой** кривой $x = X(t)$, $y = Y(t)$, если существует $u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ такое, что при $t \to u$ расстояние от точки $(X(t), Y(t))$ до прямой l стремится к 0, а расстояние от этой точки до начала координат – к бесконечности.

17.2. По определению, для того, чтобы найти асимптоты кривой сначала надо выяснить, в окрестностях каких точек одна из функций $X(t)$ или $Y(t)$ стремится к бесконечности. Если $X(t) \to \infty$, а $Y(t) \to c = const$ при $t \to u$, то прямая $y = c$ является горизонтальной асимптотой кривой. Если $Y(t) \to \infty$, а $X(t) \to c = const$ при $t \to u$, то прямая $y = c$ является вертикальной асимптотой кривой (в случае явного задания кривой c – точка разрыва бесконечного типа).

Предположим теперь, что $X(t)$ и $Y(t)$ – бесконечно большие при $t \to u$, а прямая $y = ax + b$ является асимптотой кривой (очевидно, $a \neq 0$). Расстояние от точки (X, Y) до прямой равно $\frac{|Y-aX-b|}{\sqrt{1+a^2}}$. Следовательно, $Y(t) - aX(t)@ > t \to u >> b$. Поделив обе части на $X(t)$ получим $\frac{Y(t)}{X(t)} - a@ > t \to u >> 0$. Таким образом,

$$a = \lim_{t\to u}\frac{Y(t)}{X(t)} \qquad b = \lim_{t\to u}(Y(t) - aX(t))$$

Обратно, если эти пределы существуют и конечны, то прямая $y = ax + b$ – асимптота. Если же хотя бы один из этих пределов бесконечен или не существует, то асимптоты при $t \to u$ нет.

Далее мы будем рассматривать только график функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 17.3. Функция f называется **выпуклой вниз** на промежутке D, если ее график лежит ниже любой секущей. Точнее, f выпукла вниз на D, если для любых $a, b \in D$, $c \in (a, b)$ выполнено неравенство $f(c) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$ (чтобы понять левую часть последнего неравенства, достаточно проверить, что прямая $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ проходит через точки $(f, f(a))$ и $(b, f(b))$, т.е. действительно является секущей).

Аналогично определяется выпуклость вверх.

Точка c называется **точкой перегиба** функции f, если f выпукла в одну сторону на некотором отрезке $[a, c]$, и выпукла в другую сторону на некотором отрезке $[c, b]$.

Теорема 17.4. *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *f выпукла вниз на $[a, b]$.*
2) *График f лежит выше любой касательной, проведенной в точке $c \in [a, b]$.*
3) *$f'' \geqslant 0$ на $[a, b]$.*

Аналогичное утверждение верно для выпуклости вверх.

Доказательство. (3)$\Rightarrow$(2). Для любых $x, c \in [a, b]$ по формуле Тэйлора существует $\theta \in [x, c]$ такая, что $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\theta)(x-c)^2$. По условию (3) последнее слагаемое больше или равно нуля. Поэтому $f(x) \geqslant f(c) + f'(c)(x-c)$, что и означает, что точка $(x, f(x))$ лежит выше графика касательной в точке c.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть $c, d \in [a, b]$. Нам надо доказать, что секущая, проходящая через точки $(c, f(c))$ и $(d, f(d))$ лежит выше графика функции на $[c, d]$, т.е., что для любого $x \in [c, d]$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(c) + \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$. Обозначим $k = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ и рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - k(x-c)$. Заметим, что $g(c) = g(d) = 0$, а то, что мы доказываем, эквивалентно неравенству $g(x) \leqslant 0$. Пусть $g(\theta) = \sup\limits_{x\in[c,d]} g(x)$, где $\theta \in [c, d]$ существует по теореме 6.4 главы 1. Если $\theta = c$ или $\theta = d$, то $g(x) \leqslant g(\theta) = 0$, ч.т.д. Если $\theta \in (c, d)$, то $g'(\theta) = 0$, откуда $f'(\theta) = k$. Так как по условию (2) касательная в точке θ лежит ниже графика, то $f'(x) \geqslant f(\theta) + f'(\theta)(x-\theta)$, что расновсильно неравенству $f(x) - k(x-c) - f(c) \geqslant f(\theta) - k(\theta - c) - f(c)$, т.е. $g(x) \geqslant g(\theta)$.

(1)$\Rightarrow$(3). Предположим, что $f''(\theta) < 0$ для некоторой $\theta \in [a, b]$. Положим $h(x) = -f(x)$ так, что $h''(\theta) > 0$. По непрерывности h'' существуют такие c, d, что $\theta \in [c, d] \subseteq [a, b]$ и h'' неотрицательна на $[c, d]$. Тогда по доказанному выше h выпукла вниз на $[c, d]$. Но это означает, что f выпукла вверх на $[c, d]$, а по условию (1) f выпукла вниз. Следовательно, график f – прямая, откуда $f''(\theta) = 0$, что противоречит предположению. $\square$

Ясно, что этой теоремой можно пользоваться и в случае параметрически или неявно заданных функций.