Конспект лекций по коммутативной алгебре
Факультет математики и компьютерных наук
СПбГУ
осень 2023

А.В.Степанов

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Простые и максимальные идеалы, неприводимые элементы

Определение 1.1.1. Собственный идеал I называется простым, если $ab \in I$ влечет $a \in I$ или $b \in I$.

Собственный идеал I называется максимальным, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале.

Лемма 1.1.2. *Для любого собственного идеала существует максимальный идеал, содержащий его.*

Лемма 1.1.3. *Собственный идеал I простой тогда и только тогда, когда R/I – область целостности.*

Идеал I максимальный тогда и только тогда, когда R/I – поле.

Любой максимальный идеал является простым.

Определение 1.1.4. Элементы $a, b \in R$ называются ассоциированными, если $aR = bR$.

Необратимый элемент $a \in R$ называется неприводимым, если из равенство $a = bc$ следует, что b или c ассоциирован с a.

Необратимый элемент $a \in R$ называется простым, если главный идеал aR простой.

Лемма 1.1.5. *Любой простой элемент неприводим. Обратное, вообще говоря, неверно.*

1.2. Нетеровость

Определение 1.2.1. Кольцо называется нетеровым, если оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек (ACC – ascending chain condition) идеалов.

Модуль называется нетеровым, если он удовлетворяет ACC для подмодулей.

Лемма 1.2.2. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны.*

(1) *R нетерово.*
(2) *Любой идеал в R конечнопорожден.*
(3) *Любой подмодуль конечнопорожденного R-модуля конечнопорожден.*
(4) *Любой конечнопорожденный R-модуль нетеров.*

Доказательство. (1) $\implies$ (2) и (3) $\implies$ (4) – упражнения. (4) $\implies$ (1) – тривиально.

(2) $\implies$ (3). Пусть $M = \langle x_1, \dots, x_m \rangle_R$ – конечнопорожденный R-модуль, а $N \leqslant M$. Зададим эпиморфизм свободного R-модуля R^m на M по формуле $a \mapsto \sum_{i=1}^m x_i a_i$. Пусть N' – полный прообраз N под действием этого гомоморфизма. Ясно, что из конечнопорожденности N' следует конечнопорожденность N. Индукцией по m докажем, что N' конечнопорожден. Пусть $\pi : R^m \to R$ – проекция на последнюю компоненту, т. е. $\pi(a) = a_m$. Образ подмодуля – подмодуль, поэтому $\pi(N')$ идеал в R. Так как R нетерово, то этот идеал конечнопорожден, скажем множеством $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Выберем прообразы $y_i \in \pi^{-1}(\alpha_i)$. Тогда $N' = \langle y_1, \dots, y_n \rangle + (N' \cap \operatorname{Ker} \pi)$. По индукционному предположению $N' \cap \operatorname{Ker} \pi$, являющийся подмодулем в свободном модуле $\operatorname{Ker} \pi \cong \mathbb{R}^{m-1}$, конечнопорожден. Следовательно, и N' конечнопорожден. □

Теорема 1.2.3 (теорема Гильберта о базисе)**.** *Кольцо многочленов от конечного числа переменных над нетеровым кольцом нетерово.*

Следствие 1.2.4. *Любая конечнопорожденная алгебра над нетеровым кольцом нетерова. Любое кольцо является объединением нетервых подколец.*

1.3. Факториальность

Определение 1.3.1. Область целостности R называется факториальным кольцом, если любой ненулевой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых единственным образом. Единственность понимается в следующем смысле: если $\prod_{i=1}^{m} p_i$ ассоциировано с $\prod_{j=1}^{n} q_j$ для некоторых неприводимых элементов $p_i, q_j \in R$, то $m = n$ и существует перестановка $\sigma \in S_n$ такая, что p_i ассоциирован с $q_{\sigma(i)}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1.3.2. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Любой ненулевой необратимый элемент кольца раскладывается в произведение неприводимых.*
(2) *Любая возрастающая цепочка главных идеалов обрывается.*

Лемма 1.3.3. *Пусть R – область целостности. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Каждый неприводимый элемент порождает простой идеал.*
(2) *Разложение на неприводимые элементы единственно.*

Следствие 1.3.4. *Пусть R – нетерова область целостности, в которой каждый неприводимый элемент прост. Тогда R факториально.*

Теорема 1.3.5. *Кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально.*

1.4. Топология Зариского

В этом параграфе проводится параллель между коммутативной алгеброй и алгебраической геометрией. Как будет видно, точное соответствие (антиэквивалентность категорий) будет иметь место только между *аффинными* многообразиями и *конечнопорожденными редуцированными* алгебрами над *замкнутым полем*. Однако даже это дает возможность оценить, какие свойства колец стоит ожидать (хотя бы при дополнительных предположениях), исходя из геометрической интуиции. Быстрый перевод с языка коммутативной алгебры на язык алгебраической геометрии и обратно является важнейшим условием хорошего понимания коммутативной алгебры.

Пусть, F – поле. Множество $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_F := F^n$ называется аффинным пространством над F. Пусть $J \subseteq A = F[t_1, \ldots, t_n]$. Обозначим через $V(J)$ множество общих нулей всех многочленов из J. Напомним, что радикал идеала I кольца R определяется по формуле

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : \ f^n \in I\}.$$

Идеал называется радикальным, если он совпадает со своим радикалом. Другими словами, I – радикальный идеал $\iff$ R/I – редуцированное кольцо, т. е. кольцо без нильпотентных элементов. Нетрудно видеть, что $V(J) = V(\sqrt{AJ})$, где $AJ = \sum_{f \in A} Af$ – идеал, порожденный J.

Набор замкнутых подмножеств $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$, где J пробегает множество радикальных идеалов алгебры A, задает топологию на $\mathbb{A}^n$, которая называется топологией Зариского. Для подмножества $X \subseteq \mathbb{A}^n$ обозначим через $I(X)$ множество всех многочленов из A, обращающихся в 0 на X. Легко видеть, что $V\big(I(X)\big)$ является замыканием множества X в топологии Зариского.

Замкнутое подмножество аффинного пространства называют еще алгебраическим многообразием (variety, в отличие от топологического многообразия – manifold). Топология на нем индуцирована с аффинного пространства.

Морфизмом аффинных многообразий $X \subseteq \mathbb{A}^n$ в $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ называется полиномиальное отображение $X \to Y$ (отображение $X \to Y$ называется полиномиальным, если оно является сужением отображения $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, все координатные функции которого являются полиномиальными). Обратите внимание, что полиномиальные функции $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, переводящие X в Y и совпадающие на X, считаются равными морфизмами. Класс (множество) аффинных многообразий с таким набором морфизмов является категорией, которую мы будем обозначать через $\mathbf{Aff} = \mathbf{Aff}/F$. Так как $\mathbb{A}^1 = F$, то морфизм из X в $\mathbb{A}^1$ – это просто многочлен от n переменных. Морфизмы $f, g \in A$ равны тогда и только тогда, когда $f - g$ аннулирует X, т. е. $f - g \in I(X)$. Таким образом, $\operatorname{Mor}(X, \mathbb{A}^1) \cong A/I(X)$. Это кольцо называется аффинной алгеброй многообразия X и обозначается через $F[X]$.

Так как $\operatorname{Mor}_{\mathbf{Aff}}(\_, \mathbb{A}^1)$ является контравариантным функтором, а кольцевые операции на $\operatorname{Mor}_{\mathbf{Aff}}(X, \mathbb{A}^1)$ задаются естественным образом, то отображение $X \to F[X]$ определяет контравариантный функтор из $\mathbf{Aff}$ в категорию $\mathscr{A} = \mathscr{A}_F$ редуцированных конечнопорожденных F-алгебр.

Для того чтобы определить функтор в обратную сторону, для каждой конечнопорожденной редуцированной F-алгебры R выберем эпиморфизм $\pi_R : A \to R$ (это равносильно выбору конечного набора образующих в R).[1] Снова $\mathscr{X} := \operatorname{Mor}_{\mathscr{A}}(\_, F)$ является контравариантным функтором $\mathscr{A} \to \mathbf{Set}$. Множество $\mathscr{X}(A)$ естественно отождествляется с $\mathbb{A}^n$ по формуле $\varphi \mapsto \bigl(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n)\bigr)$. Таким образом, множество $\mathscr{X}(R)$ вкладывается в $\mathbb{A}^n = \mathscr{X}(A)$ посредством $\psi \mapsto \psi \circ \pi_R$. При этом множество $\mathscr{X}(R) = V(\operatorname{Ker} \pi_R)$ является алгебраическим многообразием с аффинной алгеброй $A/I\bigl(V(\operatorname{Ker} \pi_R)\bigr)$.

Получаем:

$$\mathscr{X}\bigl(F[X]\bigr) = \mathscr{X}\bigl(A/I(X)\bigr) = V\bigl(I(X)\bigr) = X \text{ и } F[\mathscr{X}(R)] = A/I\bigl(V(\operatorname{Ker} \pi_R)\bigr)$$

Последняя алгебра изоморфна R тогда и только тогда, когда $I\bigl(V(J)\bigr) = J$, где $R \cong A/J$. Над произвольным полем последнее равенство не имеет шансов быть верным, хотя бы потому что существуют многочлены ненулевой степени, не имеющие корней.

Теорема 1.4.1 (Теорема Гильберта о нулях). *Пусть F – алгебраически замкнутое поле, $J \subseteq F[t_1, \dots, t_n]$, а $f \in F[t_1, \dots, t_n]$. Тогда $f\bigl(V(J)\bigr) = 0 \iff f \in \sqrt{RJ}$.*

Другими словами, теорема Гильберта о нулях утверждает, что над замкнутым полем функции I и V являются взаимно обратными биекциями между множеством радикальных идеалов J кольца $F[t_1, \dots, t_n]$ и множестом замкнутых подмножеств в $\mathbb{A}^n$. Таким образом, если F алгебраически замкнуто, то функторы $\operatorname{Mor}_{\mathbf{Aff}}(\_, F)$ и $\mathscr{X}$ являются квази-обратными и задают антиэквивалентность категорий $\mathbf{Aff}$ и $\mathscr{A}$.

Легко видеть, что и для любого аффинного многообразия функции, индуцированные I и V, задают взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подмножествами многообразия X и радикальными идеалами аффинной алгебры $F[X]$. При этом точкам X соответствуют максимальные идеалы $F[X]$. Обозначим через $\operatorname{Specm} R$ – множество максимальных идеалов кольца R, которое обычно называют максимальным спектром R. Зададим на $\operatorname{Specm} R$ набор замкнутых множеств

$$\tilde{V}(J) := \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R \mid \mathfrak{m} \supseteq J\}, \qquad J \subseteq R.$$

При таком определении X гомеоморфно $\operatorname{Specm}(F[X])$.

В случае незамкнутого поля F вместо общих корней набора многочленов из $F[t_1, \dots, t_n]$ в F^n правильно рассматривать общие корни этого набора в R^n для любой F-алгебры R. В этом случае многообразию X соответствует функтор $\operatorname{Mor}_{F\text{-}\mathbf{Alg}}(F[X], \_)$, который называется аффинной схемой. Действительно, Если $F[X] \cong F[t_1, \dots, t_n]/J$, то гомоморфизм F-алгебр $\varphi : F[X] \to R$ однозначно задается образами $a_i = \varphi(t_i)$, причем $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любого $f \in J$. При этом множество $\operatorname{Mor}_{F\text{-}\mathbf{Alg}}(F[X], R)$ называется точками схемы X над R.

В случае незамкнутого поля или бесконечнопорожденных алгебр правильно вместо максимального спектра рассматривать простой спектр. Множество простых идеалов кольца R называется (простым) спектром кольца R и обозначается через $\operatorname{Spec} R$. Топология Зариского на спектре

[1] Здесь используется аксиома выбора для классов.

определяется аналогично топологии Зариского на $\operatorname{Specm} R$. Точнее, для подмножества $J \subseteq R$ обозначим $V(J) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid J \subseteq \mathfrak{p}\}$. По-прежнему можно считать, что J – радикальный идеал. Топология Зариского – это топология на $\operatorname{Spec} R$, в которой $V(J)$ и только они являются замкнутыми множествами.

Топологическое пространство $\operatorname{Spec} R$ вместе с пучком колец регулярных функций называется аффинной схемой. Допуская вольность речи мы будем называть само топологическое пространство аффинной схемой.

Глава 2

Локализация

2.1. Определение и конструкция

Идея состоит в том, чтобы обратить некоторый набор элементов универсальным образом. Заметим, что обратимый элемент не может быть делителем нуля. Поэтому, если мы хотим обратить хоть один делитель нуля, то все элементы, которые в произведении с ним дают 0, должны обратиться в 0. Заметим также, что если два элемента стали обратимыми, то обратимым стало и их произведение. Так как 1 уже обратима, то включение 1 в наше множество ничего не изменит. Поэтому мы будем говорить только об обращении элементов из некоторого мультипликативно замкнутого подмножества с 1. Другими словами, наше множество всегда будет мультипликативным моноидом, содержащим 1 кольца. Коротко такое множество называется мультипликативным.

Определение 2.1.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. Локализацией кольца R в S называется кольцо $S^{-1}R$ вместе с локализационным гомоморфизмом $\lambda = \lambda_S : R \to S^{-1}R$ удовлетворяющее следующим свойствам.

(1) Для любого $s \in S$ элемент $\lambda(s)$ обратим в $S^{-1}R$.

(2) Для любого гомоморфизма $\varphi : R \to A$, при котором $\varphi(s) \in A^{\times}$ для всех $s \in S$, существует единственный гомоморфизм $\psi : S^{-1}R \to A$ такой, что $\psi \circ \lambda = \varphi$.

Это определение ничего не говорит о существовании локализации. На самом деле она всегда существует и, как и все универсальные конструкции, единственна с точностью до единственного изоморфизма. Определим отношение “$\sim$” на множестве $R \times S$ по следующему правилу:

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff \exists s \in S : \ ss_2r_1 = ss_1r_2.$$

Легко проверить, что это отношение является отношением эквивалентности. Положим $S^{-1}R = R \times S/\sim$. Класс эквивалентности, содержащий (r, s) обозначается $\frac{r}{s}$. Определим отображение $\lambda : R \to S^{-1}R$ формулой $\lambda(r) = \frac{r}{1}$. Определим операции на $S^{-1}R$ следующими формулами:

$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1r_2}{s_1s_2} \quad \text{и} \quad \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{s_1r_2 + s_2r_1}{s_1s_2}.$$

Тогда $S^{-1}R$ является локализацией кольца R в мультипликативном подмножестве S с локализационным гомоморфизмом λ.

Обратите внимание, что гомоморфизм локализации инъективен тогда и только тогда, когда S не содержит делителей нуля. Приведем несколько часто используемых примеров мультипликативных подмножеств и локализаций в них.

(1) Для $s \in R$ положим $\langle s \rangle = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}_0$. Локализация $\langle s \rangle^{-1}R$ обозначается через R_s и называется главной локализацией в элементе s (по аналогии с главным идеалом).

(2) Если $\mathfrak{p}$ – простой идеал кольца R, то $R \setminus \mathfrak{p}$ является мультипликативным подмножеством. В этом случае локализация $R_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ называется локализацией кольца R в простом идеале P.

(3) S – множество всех элементов в R, не являющихся делителями 0 (сам 0 является делителем 0). Тогда $S^{-1}R$ называется полным кольцом частных кольца R. Это максимальная локализация, для которой гомоморфизм локализации инъективен.

(4) $R = K[x]$, где K – кольцо, S – множество унитальных многочленов (“унитальный” означает, что старший коэффициент 1).

Определение 2.1.2. Кольцо называется локальным, если оно имеет ровно 1 максимальный идеал и полулокальным, если максимальных идеалов конечное число.

Если $\mathfrak{p}$ – простой идеал, то $R_{\mathfrak{p}}$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$.[1] Аналогично, если $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ – простые идеалы, то $R' = (R \setminus \cup \mathfrak{p}_i)^{-1}R$ – полулокальное кольцо с максимальными идеалами $\mathfrak{p}_i R'$.

2.2. Спектр локализации

Для произвольного гомоморфизма $\varphi : R \to A$ рассмотрим отображения $\varphi^* : \operatorname{Ideals} A \to \operatorname{Ideals} R$, $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$, и $\varphi_* : \operatorname{Ideals} R \to \operatorname{Ideals} A$, $I \mapsto \varphi(I)A$. Так как прообраз простого идеала прост, то φ^* можно сузить до отображения $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$.

Лемма 2.2.1. *Включение $I \in \operatorname{Im} \varphi^*$ эквивалнентно равенству $I = \varphi^*\big(\varphi_*(I)\big)$.*

Доказательство. Ясно, что из равенства следует включение. Обратно, если $I = \varphi^*(J)$, то $\varphi(I) \subseteq J$, откуда $\varphi_*(I) \subseteq J$ и $\varphi^*\big(\varphi_*(I)\big) \subseteq \varphi^*(J) = I$. С другой стороны, $I \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(I)\big) \subseteq \varphi^*\big(\varphi_*(I)\big)$. □

Оказывается, то же самое верно и для сужения φ^* на спектры.

Лемма 2.2.2. *Пусть $\varphi : R \to A$ – произвольный гомоморфизм колец. Тогда $\mathfrak{p} \in \varphi^*(\operatorname{Spec} A)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} = \varphi^*\big(\varphi_*(\mathfrak{p})\big)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{p} \in \varphi^*(\operatorname{Spec} A)$, то $\mathfrak{p} = \varphi^*\big(\varphi_*(\mathfrak{p})\big)$ по лемме 2.2.1.

Для доказательства обратной импликации необходимо показать, что найдется простой идеал $\mathfrak{q}$ в A, полный прообраз которого совпадает с полным прообразом идеала $\varphi_*(\mathfrak{p})$. Заметим, что $S := \varphi(R \setminus \mathfrak{p})$ является мультипликативным подмножеством в A. Если $a \in S \cap \varphi(\mathfrak{p})A$, то $\varphi^{-1}(a) \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(\mathfrak{p})A\big) = \mathfrak{p}$. С другой стороны, у a есть прообраз в $R \setminus \mathfrak{p}$. Противоречие показывает, что $S \cap \varphi(\mathfrak{p})A = \varnothing$, следовательно, $\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}A$ является собственным идеалом в кольце $S^{-1}A$ (допуская вольность речи, мы отождествляем множество с его образом под действием гомоморфизма локализации, для того чтобы избежать громоздких обозначений). Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в $S^{-1}A$, содержащий $\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}A$, а $\mathfrak{q}$ – его прообраз в A под действием гомоморфизма локализации. Так как $\mathfrak{m} \neq S^{-1}A$, то $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Следовательно, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing$, т. е. $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$. С другой стороны, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}\big(\varphi(\mathfrak{p})A\big) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. □

Теперь вместо произвольного гомоморфизма рассмотрим гомоморфизм локализации $\lambda : R \to S^{-1}R$, где S – мультипликативное подмножество в R. Тогда выполнено более сильное условие.

Лемма 2.2.3. $\lambda_* \circ \lambda^* = \mathrm{id}$. *Следовательно, λ^* инъективно, а λ_* сюръективно.*

Доказательство. Рассмотрим идеал J кольца $S^{-1}R$. Ясно, что $\lambda\big(\lambda^{-1}(J)\big) \subseteq J$. Так как J – идеал, то и $\lambda\big(\lambda^{-1}(J)\big)S^{-1}R \subseteq J$. Обратно, если $\frac{r}{s} \in J$, то и $\frac{r}{1} \in J$, откуда $\frac{r}{1} \in \lambda\big(\lambda^{-1}(J)\big)$. Таким образом, $\frac{r}{s} \in \lambda\big(\lambda^{-1}(J)\big)S^{-1}R$. □

Следствие 2.2.4. *Локализация нетерова кольца нетерова.*

Лемма 2.2.5. *Идеал $I \leqslant R$ лежит в образе λ^* тогда и только тогда, когда образ S в R/I не содержит делителей 0.*

Доказательство. Пусть $J = \lambda_*(I)$, а $I' = \lambda^*(J)$. По лемме 2.2.1 $I \in \operatorname{Im} \lambda^* \iff I = I'$. Пусть $\rho : R \to R/I$ гомоморфизм редукции. Если $\rho(r)\rho(s) = 0$ для некоторых $r \in R$ и $s \in S$, то $rs = j \in I$, откуда $\frac{r}{1} = \lambda(j) \cdot \frac{1}{s} \in J$, т. е. $r \in I'$. Если $I = I'$, то $\rho(r) = 0$, откуда $\rho(s)$ не делитель нуля.

Обратно, если $r \in I' \setminus I$, то $\lambda(r) = \lambda(j) \cdot \frac{t}{s}$ для некоторых $j \in I$, $s \in S$ и $t \in R$. Тогда существует $s' \in S$ такой, что $rss' = jts'$. Получаем, $\rho(r)\rho(ss') = 0$ в то время, как $\rho(r) \neq 0$. □

[1] Несмотря на то, что локализационный гомоморфизм не является инъективным, принято образы элементов и идеалов кольца в локализации обозначать теми же символами, т. е. вместо $\lambda(r)$ писать просто r и т. п.

Следствие 2.2.6. *Отображение* $\lambda^* : \operatorname{Spec} S^{-1}R \to \operatorname{Spec} R$ *инъективно. Его образ равен множеству простых идеалов, не пересекающихся с* S.

Сужение λ_* *на множество простых идеалов* R, *не пересекающихся с* S, *инъективно.*

Таким образом, λ^* *и* λ^* *– взаимно обратные биекции между* $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ *и множеством простых идеалов* R, *не пересекающихся с* S.

Следствие 2.2.7. *Если* $S = \langle s \rangle := \{1, s, s^2, \dots\}$, *то* $\operatorname{Im} \lambda^* = \operatorname{Spec} R \setminus V(s)$ *– главное открытое подмножество в* $\operatorname{Spec} R$.

Таким образом, $\{\operatorname{Spec} R_s \mid s \in R\}$ – открытое покрытие аффинными схемами. Это же множество является базой топологии Зариского.

Теорема 2.2.8. *Пусть* I *– идеал кольца* R. *Тогда* $\sqrt{I}$ *равен пересечению всех простых идеалов, содержащих* I. *В частности, нильпотентный радикал* $\operatorname{NRad} R := \sqrt{0}$ *равен пересечению всех простых идеалов кольца* R.

Доказательство. Ясно, что $\sqrt{I}$ содержится в любом простом идеале, содержащим I. Пусть сначала $I = 0$. Возьмем $f \in \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$. По следствию 2.2.6 $\operatorname{Spec} R_f = \varnothing$. Но в любом ненулевом кольце существует хотя бы один максимальный идеал. Поэтому $R_f = \{0\}$. Из равенства, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$ получаем: $f^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Для произвольного идеала I обозначим через $\rho : R \to R/I$ канонический гомоморфизм. Ясно, что $\rho^{-1}(\operatorname{NRad} R/I) = \sqrt{I}$. Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R/I идеал $\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ прост и содержит I. Таким образом,

$$\sqrt{I} \subseteq \bigcap_{I \subseteq \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{q} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R/I} \rho^{-1}(\mathfrak{p}) = \rho^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R/I} \mathfrak{p}) = \rho^{-1}(\operatorname{NRad} R/I) = \sqrt{I}$$

□

2.3. Плоские модули и локализация

Пусть M – R-модуль, а S – мультипликативное подмножество в R.

Определение 2.3.1. Множество $M \times S/\sim$, где $(m, s) \sim (m', s') \iff \exists s'' \in S : \; ms's'' = m'ss''$ с естественно заданными операциями называется локализацией модуля M в S.

Лемма 2.3.2. $S^{-1}M \cong M \otimes_R S^{-1}R$.

Доказательство. Отображение $\frac{m}{s} \mapsto m \otimes \frac{1}{s}$ задано корректно, является гомоморфизмом $S^{-1}R$-модулей, инъективно и сюръективно. □

Определение 2.3.3. Функтор $\mathscr{F} : R\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ называется аддитивным, если он сохраняет суммы морфизмов.

Далее все функторы действуют из R-**Mod** в R-**Mod** и являются аддитивными.

Определение 2.3.4. Функтор $\mathscr{F}$ называется точным, если он сохраняет точные последовательности (достаточно требовать, чтобы он сохранял короткие точные последовательности).

Функтор $\mathscr{F}$ называется точным справа, если он сохраняет точность любой последовательности вида $A \to B \to C \to 0$.

Предложение 2.3.5. *Функтор тензорного произведения на фиксированный модуль точен справа.*

Если функтор точен справа и сохраняет мономорфизмы, то он точен.

Определение 2.3.6. Модуль называется плоским, если тензорное произведение на него является точным функтором.

Предложение 2.3.7. R-*модуль* $S^{-1}R$ *является плоским.*

Доказательство. Пусть $\varphi : M \to N$ – мономорфизм R-модулей. Образ элемента $\frac{m}{s} \in S^{-1}M = M \otimes S^{-1}R$ равен $\frac{\varphi(m)}{s}$. Если он равен нулю, то $s'\varphi(m) = \varphi(s'm) = 0$, для некоторого $s' \in S$. Так как φ инъективен, то $s'm = 0$, откуда $\frac{m}{s} = 0$. $\square$

Следствие 2.3.8. *Локализация модуля сохраняет ядра, коядра и конечные пересечения подмодулей (для бесконечных неверно).*

Доказательство. Тензорное умножение на $S^{-1}R$ является точным функтором. Любой точный функтор сохраняет ядра и коядра. Конечное пересечение $\bigcap M_i$ является ядром отображения $M \to \bigoplus M/M_i$ (если заменить прямую сумму на прямое произведение бесконечного числа подмодулей, то локализция этого произведения не будет равна произведению локализаций, так как не получится взять общий знаменатель бесконечного числа дробей). $\square$

Обозначения локализций модулей аналогичны обозначениям локализаций колец, в частности, $M_\mathfrak{p} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал кольца R.

Свойство P для R-модулей называется локальным, если $P(M) \iff \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : \ P(M_\mathfrak{p})$.

Аналогично определяется локальное свойство гомоморфизмов модулей.

Лемма 2.3.9. $M \to \prod\limits_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R} M_\mathfrak{m}$ *инъективно.*

Предложение 2.3.10. *Следующие свойства являются локальными.*

- $M = 0$.
- *Гомоморфизм* φ *инъективен.*
- M *плоский.*
- M *проективный (свойство быть свободным не является локальным).*

Лемма 2.3.11. *Для простого идеала* $\mathfrak{p}$*:* $M_\mathfrak{p} \neq 0 \iff \operatorname{Ann} M \leqslant \mathfrak{p}$.

Глава 3

Лемма Накаяма и радикал Джекобсона

3.1. Теорема Гамильтона–Кэли

Обычная теорема Г–К методом общего элемента.

Везде далее R – кольцо, I – идеал в R, а M – конечнопорожденный R-модуль.

Теорема 3.1.1 (Гамильтона–Кэли). *Пусть $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ таков, что $\operatorname{Im} \varphi \leqslant IM$. Предположим, что M порожден n элементами. Тогда существует многочлен*

$$f = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in R[t]$$

с коэффициентами $\alpha_i \in I^{n-i}$ аннулирующий φ.

3.2. Лемма Накаяма

Теорема 3.2.1 (Лемма Накаяма). *$IM = M \implies \exists a \in I \, \forall m \in M: \ am = m.$*

Доказательство. Применяем теорему Гамильтона–Кэли к id_M. □

Равносильная формулировка: если $M = IM$ – модуль над кольцом I без единицы, то $I/\operatorname{Ann} M$ – кольцо с единицей.

Следствие 3.2.2. *Сюръективный эндоморфизм модуля M является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \operatorname{End}(M)$ сюръективен. Определим действие $R[t]$ на M посредством гомоморфизма $\theta : R[t] \to \operatorname{End}(M)$, посылающего t в φ. Так как φ сюръективен, $tR[t]M = M$. По лемме Накаяма существует $f \in tR[t]$ такой, что $fm = m$ для любого $m \in M$. Запишем $f = tg$ для некоторого $g \in R[t]$ и спроектируем результат в $\operatorname{End}(M)$ посредством θ: $\varphi \circ g(\varphi) = \mathrm{id}$. Так как φ коммутирует с многочленом от себя, то φ и $g(\varphi)$ – взаимно обратные автоморфизмы модуля M. □

Свойство ИБЧ.

Следствие 3.2.3. *Любой набор из n образующих свободного R-модуля R^n является базисом.*

Упражнение 3.2.4. Если $M/\mathfrak{m}M = 0$ для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R, то $M = 0$.

Упражнение 3.2.5. Пусть R – локальное кольцо, а M и N – R-модули. Тогда $M \otimes N = 0 \iff M = 0 \vee N = 0$.

3.3. Радикал Джекобсона

Кольцо R, как модуль над собой, называется *регулярным R-модулем*.

Определение 3.3.1. Аннулятором R-модуля M называется множество $\operatorname{Ann} M = \{r \in R \mid rM = 0\}$.

Лемма 3.3.2. *Ненулевой простой R-модуль M изоморфен $R/\mathfrak{m}$ для некоторого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца R. Таким образом, $\operatorname{Ann} M$ является макимальным идеалом кольца R.*

Лемма 3.3.3. *Пусть r – элемент кольца R. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *r содержится в любом максимальном идеале кольца R.*
(2) *r можно исключить из любой системы образующих регулярного R-модуля.*
(3) *Для любого $x \in R$ элемент $1 + xr$ обратим.*
(4) *$r \in \operatorname{Ann} M$ для любого простого R-модуля M.*

Доказательство. (1) $\implies$ (3). Если $1 + xr$ не обратим, то $R(1 + xr)$ лежит в каком-то максимальном идеале $\mathfrak{m}$ (следует из теоремы о существовании максимального идеала). $r, 1+xr \in \mathfrak{m} \implies 1 \in \mathfrak{m}$ – противоречие.

(3) $\implies$ (2). Если $S \cup \{r\}$ порождает регулярный R-модуль, то $1 = xr + \sum_{s\in S} x_s s$, откуда $1 - xr = \sum_{s\in S} x_s s$ и $1 = \sum_{s\in S}(1 - xr)^{-1} x_s s$. Следовательно, уже S порождает R.

(2) $\implies$ (1). Если r не лежит в максимальном идеале $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m} + Rr = R$, т. е. $\mathfrak{m} \cup \{r\}$ порождает R. Но тогда $\mathfrak{m}$ порождает R – противоречие.

Расносильность (1) $\iff$ (4) сразу следует из леммы 3.3.2. ☐

Определение 3.3.4. Множество элементов, удовлетворяющих условиям предыдущей леммы, называется радикалом Джекобсона кольца.

Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $\operatorname{Rad} R$ или $\operatorname{JRad} R$. Если $\operatorname{Rad} R = \{0\}$, то кольцо R называется полупростым.

Следующее утверждение – одна из формулировок леммы Накаямы, которая верна и для некоммутативных колец.

Следствие 3.3.5. *Если $I \subseteq \operatorname{Rad} R$ и $IM = M$, то $M = 0$.*

Доказательство. По лемме Накаямы существует элемент $r \in I$, такой что $(1 - r)M = 0$. Так как $r \in \operatorname{Rad} R$, то $1 - r$ обратим, откуда $M = (1 - r)^{-1}(1 - r)M = 0$. ☐

Предложение 3.3.6. *$R/\operatorname{Rad} R$ – полупростое кольцо.*

Доказательство. Полный прообраз максимального идеала при каноническом эпиморфизме $\rho : R \to R/\operatorname{Rad} R$ – максимальный идеал. Так как любой максимальный идеал содержит $\operatorname{Rad} R$, то его образ в $R/\operatorname{Rad} R$ собственный идеал, очевидно являющийся максимальным. Получаем биекцию между $\operatorname{Specm} R$ и $\operatorname{Specm} R/\operatorname{Rad} R$. Прообраз пересечения равен пересечению прообразов, поэтому прообраз радикала кольца $R/\operatorname{Rad} R$ равен радикалу кольца R. Таким образом, $\operatorname{Rad}(R/\operatorname{Rad} R) = \rho(\operatorname{Rad} R) = 0$. ☐

3.4. Количество образующих идеала

Обозначим через $\mu(M) = \mu_R(M)$ наименьшее количество образующих M.

Теорема 3.4.1. *$\mu(I/I^2) \leqslant \mu(I) \leqslant \mu(I/I^2) + 1$.*

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Пусть $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n$ порождают I/I^2, а $a_1, \dots, a_n$ – их прообразы в I. Обозначим через J идеал, порожденный $a_1, \dots, a_n$, а через $\pi : R \to R/J$ – каноническую проекцию. Так как $J + I^2 = I$, то $\pi(I) = \pi(I^2) = I\pi(I)$. По лемме Накаяма существует $a \in I$ такое, что $a\pi(x) = \pi(x)$ для любого $x \in I$. Получаем $\pi(ax) = \pi(x) \iff x \in ax + J = \langle a, a_1, \dots, a_n\rangle$. Таким образом, $I = \langle a, a_1, \dots, a_n\rangle$ и $\mu(I) \leqslant n + 1$. ☐

Следующее упражнение, вероятно, не простое.

Упражнение 3.4.2. Если R нетерово кольцо размерности > 1, то множество $\{\mu(I) \mid I \leqslant R\}$ не ограничено.

Глава 4

Артиновы кольца

4.1. Радикал Джекобсона артинова кольца

Кольцо называется артиновым, если оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов. Очевидно, что нильпотентный радикал всегда содержится в радикале Джекобсона. Для артиновых колец верно и обратное утверждение.

Предложение 4.1.1. *Если R – артиново кольцо, то* $\mathrm{NRad} = \mathrm{Rad}\, R$*. Более того, существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что* $(\mathrm{Rad}\, R)^n = 0$*.*

Доказательство. Пусть $J = \mathrm{Rad}\, R$. Так как R артиново слева, то цепочка $J \supseteq J^2 \supseteq \dots$ обрывается. Пусть $J^n = J^{n+1} = \dots = J^{2n} = \dots$. Предположим, что $J^n \neq 0$. Обозначим через I минимальный идеал, содержащийся в J и обладающий свойством $J^n I \neq 0$. Ясно, что этот идеал главный. Далее, $J^n(J^n I) = J^{2n} I = J^n I \neq 0$ и $J^n I \leqslant I$. По минимальности I получаем, что $J^n I = I$. Так как I – конечнопорожденный R-модуль, то можно применить лемму Накаямы в форме следствия 3.3.5, которая утверждает, что $I = 0$. Но это противоречит условию $J^n I \neq 0$, следовательно, $J^n = 0$. □

4.2. Композиционный ряд модуля

Определение ряда подмодулей и факторов этого ряда.

Два ряда называются эквивалентными, если их факторы совпадают с точностью до перестановки.

Ряд называется композиционным, если все факторы простые.

Ряды без повторений. Уплотнение ряда.

Теорема 4.2.1 (лемма о бабочке). *Пусть $M' \leqslant M$ и $N' \leqslant N$ – подмодули некоторого R-модуля. Тогда*

$$\frac{M \cap N}{(M \cap N') + (N \cap M')} \cong \frac{M' + (M \cap N)}{M' + (M \cap N')} \cong \frac{N' + (N \cap M)}{N' + (N \cap M')}.$$

Теорема 4.2.2. *Любые 2 ряда обладают эквивалентными уплотнениями.*
Любые 2 композиционных ряда эквивалентны.

Обозначим через $\ell(M)$ длину (количество включений) композиционного ряда модуля M (по теореме эта длина не зависит от выбора композиционного ряда).

Теорема 4.2.3. *Модуль обладает композиционным рядом тогда и только тогда, когда он нетеров и артинов.*

Доказательство. Если M нетеров (артинов), то любой его подмодуль и любой фактормодуль также обладают этим свойством.

Если M нетеров, то в нем существует максимальный собственный подмодуль M_1. Если $M_1 \neq 0$, то в нем существует максимальный собственный подмодуль M_2. Получаем убывающую цепочку подмодулей $M \geqslant M_1 \geqslant \dots \geqslant M_n \dots$. Если M артинов, то эта цепочка должна оборваться. По построению она может оборваться только на нулевом подмодуле. Тогда построенный ряд является композиционным.

Если M не является артиновым или нетеровым, то в нем существует ряд без повторений любой длины. По теореме 4.2.2 это противоречит существованию композиционного ряда. □

Еще одно полезное утверждение про длины модулей.

Лемма 4.2.4. *Пусть $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ – точная последовательность R-модулей. Тогда $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$. В частности, $\ell(M)$ конечна тогда и только тогда, когда и $\ell(M')$, и $\ell(M'')$ конечны.*

4.3. Строение полупростого артинова кольца

Лемма 4.3.1. *Артиново кольцо имеет конечное число максимальных идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{m}_i$, $i \in \mathbb{N}$, – различные максимальные идеалы артинова кольца R. Тогда убывающая цепочка $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathfrak{m}_i$ обрывается. Следовательно, для некоторого n имеем $\mathfrak{m}_{n+1} \geqslant \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. Так как максимальный идеал прост, то он должен содержать один из сомножителей, что противоречит условию. □

Теорема 4.3.2. *Полупростое артиново кольцо изоморфно прямой сумме конечного числа полей.*

Доказательство. По китайской теореме об остатках

$$R = R/\operatorname{Rad} R = R/\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{m}_i.$$

□

4.4. Строение артинова кольца

Лемма 4.4.1 (подъем идемпотентов). *Пусть R – кольцо, а N – нильрадикал R. Для любого идемпотента $e = e^2 \in R/N$ существует идемпотентный прообраз $\widetilde{e} = \widetilde{e}^2 \in R$.*

Доказательство. Пусть e_1 – любой прообраз e, а $f_1 = 1 - e_1$. Тогда $f_1 + e_1 = 1$ и $f_1 e_1 = n_1 \in N$.

Существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $(f_1 e_1)^k = 0$. Положим $e_2 = e_1^k$ и $f_2 = f_1^k$. Тогда $f_2 + e_2 = f_1 + e_1 + n_2 = 1 + n_2$ для некоторого $n_2 \in N$, а $f_2 e_2 = 0$.

Заметим, что $1 + n_2$ обратимо, и положим $\widetilde{e} = e_2(1+n_2)^{-1}$ и $\widetilde{f} = f_2(1+n_2)^{-1}$. Получим $\widetilde{f} + \widetilde{e} = 1$ и $\widetilde{f}\widetilde{e} = 0$, откуда $\widetilde{e}$ – идемпотент. Ясно, что его образ по модулю нильрадикала совпадает с e. □

Соберем вместе все сведения про артиновы кольца, которые мы уже (почти) доказали.

Теорема 4.4.2. *Пусть R – артиново кольцо. Тогда*

- *R имеет конечное число максимальных идеалов $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k$;*
- *$R = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} R_i$, где $R_i \cong R_{\mathfrak{m}_i}$ – артиновы локальные кольца;*
- *существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $(\mathfrak{m}_i R_i)^n = 0$ для любого i;*
- *кольцо R нетерово и, следовательно, регулярный R-модуль имеет конечную длину.*

4.5. Нетеровы кольца размерности 0

Размерность Крулля $\dim R$ кольца R – это максимальная длина цепочки строго вложенных простых идеалов (количество включений). Например, $\dim \mathbb{Z} = 1$, так как цепочка $0 \subset p\mathbb{Z}$ имеет максимальную длину. Позже мы докажем, что $\dim R[t] = \dim R + 1$, следовательно, $\dim F[t_1, \ldots, t_n] = n$, где F – поле.

Теорема 4.5.1. *Кольцо R артиново тогда и только тогда, когда оно нетерово и* $\dim R = 0$.

Доказательство. Если R артиново, то оно нетерово, а его фактор по нильрадикалу – прямая сумма конечного числа полей. Нильрадикал содержится в каждом простом идеале, а простые идеалы прямой суммы полей найти несложно.

Обратно, предположим, что R не артиново. Тогда $\ell(R) = \infty$. Пусть I – максимальный из идеалов, для которых $\ell(R/I) = \infty$. Ясно, что I не максимальный. Докажем, что он простой, т. е. $R' := R/I$ – область целостности. Про кольцо R' мы знаем, что

- $\ell(R') = \infty$,
- $\ell(R'/J) < \infty$ для любого ненулевого идеала J.

Пусть $ab = 0$ для некоторых $a, b \in R'$. Рассмотрим гомоморфизм R'-модулей $\varphi : R' \to R'$, $\varphi(x) = ax$. Ядро этого гомоморфизма называется аннулятор a, а образ – главный идеал, порожденный a. Получаем точную последовательность

$$0 \to R'/\operatorname{Ann}(a) \to R' \to R'/aR' \to 0.$$

Следовательно, или $\ell\big(R'/\operatorname{Ann}(a)\big) = \infty$, или $\ell(R'/aR') = \infty$. В первом случае $\operatorname{Ann}(a) = 0$, в частности, $b = 0$, во втором – $aR' = 0$, т. е. $a = 0$.

Наличие простого не максимального идеала в R противоречит условию. Противоречие показывает, что R артиново. $\square$

Глава 5

Целые расширения

5.1. Целые и конечные расширения

Пусть $R \subseteq A$ – пара колец. Элемент $a \in A$ называется целым над R, если он является корнем унитального многочлена с коэффициентами из R (если R – поле, то целые элементы называются алгебраическими). Кольцо A называется целым над R (или целым расширением R), если все его элементы являются целыми над R. Целое расширение поля называется алгебраическим расширением. Если A – конечнопорожденный R-модуль, то A называется конечным расширением R. Гомоморфизм колец $\varphi : R \to A$ называется конечным (целым), если A – конечное (соотв. целое) расширение $\operatorname{Im}\varphi$. В этом случае говорят также, что A является конечной (соотв. целой) R-алгеброй (гомоморфизм φ, как обычно, известен из контекста).

Лемма 5.1.1. *Пусть $R \subseteq A \ni a$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *a целый над R.*
(2) *$R[a]$ конечно над R.*
(3) *Существует конечное расширение B кольца R, содержащее a.*
(4) *Существует конечнопорожденный R-модуль M такой, что $R[a]$ вкладывается в $\operatorname{End}_R(M)$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) очевидно.

Если выполнено (3), то $R[a] \subseteq B \hookrightarrow \operatorname{End}_{R-\mathrm{mod}}(B)$ (элемент $b \in B$ отображается в умножение на b, которое является эндоморфизмом R-модуля B, так как R коммутативно).

(4) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $\varphi : R[a] \hookrightarrow \operatorname{End}_R(M)$. Применяя теорему Гамильтона–Кэли к эндоморфизму $\varphi(a)$ получаем $f\big(\varphi(a)\big) = \varphi\big(f(a)\big) = 0$ для некоторого унитального многочлена $f \in R[t]$. Так как φ инъективно, то $f(a) = 0$. ☐

Лемма 5.1.2. *Последовательность конечных расширений является конечным расширением.*

Доказательство. Пусть $R \subseteq B \subseteq C$ – кольца, причем $b_1, \dots, b_n$ порождают B, как R-модуль, а $c_1, \dots, c_m$ порождают C, как B-модуль. Тогда любой элемент $c \in C$ представляется в виде $c = \sum\limits_i c_i d_i = \sum\limits_{i,j} c_i b_j r_{ij}$, где $d_i \in B$, а $r_{ij} \in R$. Таким образом, C порождено элементами $c_i b_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ как R-модуль. Для более длинных последовательностей конечных расширений работает индукция по длине последовательности. ☐

Следствие 5.1.3. *Пусть $a_1, \dots, a_n \in A \supseteq R$. Элементы $a_1, \dots, a_n$ целые над R тогда и только тогда, когда $R[a_1, \dots, a_n]$ конечное расширение R.*

Лемма 5.1.4. *Пусть $\varphi : R \to A$ конечный (целый) гомоморфизм колец, а B – некоторая R-алгебра. Тогда канонический гомоморфизм $B \to A \otimes_R B$ является конечным (соотв. целым).*

В частности, пусть $J \lhd R$, $I \lhd A$, а S – мультипликативное подмножество R. Тогда гомоморфизмы $R/J \to A/\varphi_*(J)$, $R/\varphi^*(I) \to A/I$ и $S^{-1}R \to \varphi(S)^{-1}A$ являются конечными (соотв. целыми).

Доказательство. Гомоморфизм $\varphi : R \to A$ конечен $\iff$ существует эпиморфизм R модулей $R^n \to A$, $(r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum a_i \varphi(r_i)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in A$. Так как тензорное произведение сохраняет эпиморфизмы, то каноническое отображение $B^n \cong R^n \otimes_R B \to A \otimes_R B$ сюръективно и является гомоморфизмом B-алгебр.

Предположим теперь, что $\varphi : R \to A$ – целый. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in A \otimes_R B$. Алгебра $R[a_1, \dots, a_n]$ конечна над R. По первому параграфу доказательства $R[a_1, \dots, a_n] \otimes_R B$ конечна над B, откуда x является целым над B.

Ясно, что $A/\varphi_*(J) \cong A \otimes_R R/J$ и $\varphi(S)^{-1}A \cong A \otimes S^{-1}R$ как R-алгебры. Следовательно, гомоморфизмы $R/J \to A/\varphi_*(J)$ и $S^{-1}R \to \varphi(S)^{-1}A$ обладают требуемым свойством. С другой стороны, $\varphi_*\bigl(\varphi^*(I)\bigr) \subseteq I$. Поэтому существует канонический сюръективный гомоморфизм R/J-алгебр $A/\varphi_*\bigl(J\bigr) \to A/I$, где $J = \varphi^*(I)$. Так как $A/\varphi_*\bigl(J\bigr)$ является конечной (целой) R-алгеброй, то и A/I обладает тем же свойством. □

5.2. Спектр целого расширения

Следующая лемма применяется в дальнейшем несколько раз.

Лемма 5.2.1. *Пусть область целостности A является целым расширением R. Тогда A – поле тогда и только тогда, когда R – поле.*

Доказательство. Пусть $r \in R \smallsetminus \{0\}$. Если A – поле, то $1/r \in A$ является целым над R. Следовательно, $\frac{1}{r^n} + \frac{s_{n-1}}{r^{n-1}} + \dots + s_0 = 0$ для некоторых $s_i \in R$. Умножая на r^{n-1}, получаем $1/r + s_{n-1} + \dots + s_0 r^{n-1} = 0$, откуда $1/r = -s_{n-1} - \dots - s_0 r^{n-1} \in R$.

Обратно, пусть R – поле, $a \in A \smallsetminus \{0\}$, а $f \in R[t]$ – минимальный многочлен элемента a. Тогда $A \supseteq R[a] \cong R[t]/(f)$. Так как A – область целостности, то (f) – простой идеал. Но в области главных идеалов $R[t]$ любой ненулевой простой идеал является максимальным. Следовательно, $R[a]$ – поле, в частности, a обратим в A. □

Следствие 5.2.2. *Пусть A – целое расширение R, а $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} A$.*
$\mathfrak{q} \in \operatorname{Specm} A \iff \mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Specm} R$.
Если $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ и $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{q}' \cap R$, то $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

Доказательство. $\mathfrak{q} \in \operatorname{Specm} A \iff A/\mathfrak{q}$ – поле $\iff R/\mathfrak{q} \cap R$ – поле $\iff \mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Specm} R$.

Положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{q}' \cap R$ и $S = R \smallsetminus \mathfrak{p}$. Тогда $S^{-1}A$ целое над $S^{-1}R = R_\mathfrak{p}$. Идеалы $R \cap \mathfrak{q} S^{-1}A$ и $R \cap \mathfrak{q}' S^{-1}A$ содержат $\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$, но последний является единственным максимальным идеалом кольца $R_\mathfrak{p}$. Поэтому $R_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} S^{-1}A = R_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}' S^{-1}A \in \operatorname{Specm} R_\mathfrak{p}$. По первой части $\mathfrak{q} S^{-1}A \subseteq \mathfrak{q}' S^{-1}A \in \operatorname{Specm} S^{-1}A$, откуда $\mathfrak{q} S^{-1}A = \mathfrak{q}' S^{-1}A$. Наконец по лемме 2.2.3 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. □

$\operatorname{Spec} R/I \to \operatorname{Spec} R$ – замкнутое вложение.

Теорема 5.2.3 (теорема о подъеме)**.** *Пусть A целое над R. Тогда индуцированное отображение $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R$ является сюръективным и замкнутым. Образ $V(I)$ под действием этого отображения равен $V(I \cap R)$.*

Доказательство. Достаточно доказать что отображение сюръективно.

По лемме 2.2.6 достаточно доказать, что $\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$ лежит в образе $\operatorname{Spec}(R \smallsetminus \mathfrak{p})^{-1}A$. По следствию 5.2.2 образ максимального максимален, т. е. равен $\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$. □

Следствие 5.2.4 (классическая формулировка теоремы о подъеме)**.** *Пусть A целое над R, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$, а $\mathfrak{p}_1 \supseteq \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \in \operatorname{Spec} R$. Тогда существует $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} A$, содержащий $\mathfrak{q}$, такой что $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из того, что отображение $V(\mathfrak{q}) \to V(\mathfrak{p})$ сюръективно. □

Следствие 5.2.5. *Если A целое над R, то $\dim A = \dim R$.*

5.3. Целозамкнутость

Обозначим $\operatorname{Int}_A(R) := \{a \in a \mid a$ целый над $R\}$ – целое замыкание R в A. Из следствия 5.1.3 вытекает, что $\operatorname{Int}_A(R)$ – подкольцо в A.

Если $\operatorname{Int}_A(R) = A$, то A целое над R. Если $R = \operatorname{Int}_A(R)$, то R называется целозамкнутым в A. Область целостности называется целозамкнутой, если она целозамкнута в своем поле частных. Из теоремы о рациональных корнях многочлена следует, что любое факториальное кольцо целозамкнуто.

Следствие 5.3.1. $\operatorname{Int}_A(R)$ *целозамкнуто в* A.

Лемма 5.3.2. S *– мультипликативное подмножество в* $R \subseteq A$. *Тогда*

$$\operatorname{Int}_{S^{-1}A} S^{-1}R = S^{-1}(\operatorname{Int}_A R).$$

Предложение 5.3.3 (целозамкнутость – локальное свойство)**.** *Пусть* R *– область целостности.* (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4).

(1) R *целозамкнуто.*
(2) $S^{-1}R$ *целозамкнуто для любого мультипликативного подмножества* S *в* R.
(3) $R_{\mathfrak{p}}$ *целозамкнуто для любого* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.
(4) $R_{\mathfrak{m}}$ *целозамкнуто для любого* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$.

Доказательство. Импликации сверху вниз очевидны. Докажем (4) $\implies$ (1).

Пусть Q – поле частных кольца R. Тогда $(\operatorname{Int}_Q R)_{\mathfrak{m}} = \operatorname{Int}_Q R_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$, т. е. R-модуль $(\operatorname{Int}_Q R/R)_{\mathfrak{m}} = 0$ при любом $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$. По предложению 2.3.10 равенство нулю является локальным свойством, откуда $\operatorname{Int}_Q R = R$. □

5.4. Целое замыкание над идеалом

Определение 5.4.1. $I \triangleleft R \subseteq A$. Элемент $a \in A$ целый над I, если существует унитальный многочлен с коэффициентами из I, аннулирующий a.

Положим $\operatorname{Int}_A I := \{a \in A \mid a$ целый над $I\}$.

Лемма 5.4.2. $\operatorname{Int}_A I = \sqrt{I \operatorname{Int}_A R}$.

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Int}_A I \subseteq \operatorname{Int}_A R$. Если $a \in \operatorname{Int}_A I$, то $a^n \in IR[a] \subseteq I \operatorname{Int}_A R$.

Обратно, пусть $a^n \in I \operatorname{Int}_A R$, т. е. $a^n = \sum\limits_{i=1}^{m} r_i a_i$ для некоторых $r_i \in I$ и $a_i \in \operatorname{Int}_A R$. Так как a_i целые над R, то R-модуль $M := R[a_1, \ldots, a_m]$ конечнопорожден по следствию 5.1.3. Если $\varphi : M \to M$ – гомоморфизм умножения на a^n, то $\operatorname{Im} \varphi \leqslant IM$. По теореме Гамильтона–Кэли (теорема 3.1.1) φ является корнем унитального полинома f с коэффициентами из I. Очевидно, что $f(\varphi)$ – это умножение на $f(a^n)$. Поэтому $f(a^n)M = 0$, откуда $f(a^n) = 0$, следовательно $a \in \operatorname{Int}_A I$. □

Лемма 5.4.3. *Пусть* $R \subseteq A$ *– области целостности,* R *целозамкнуто,* $a \in A$ *целый над идеалом* $I \leqslant R$. *Обозначим через* Q *поле частных кольца* R. *Тогда коэффициенты минимального унитального многочлена* p *элемента* a *над* Q *лежат в* $\sqrt{I}$.

Доказательство. Пусть f – унитальный полином с коэффициентами из I, аннулирующий a. Тогда p делит f в кольце $Q[t]$. Имеем $Q \subseteq Q[t]/(p) \cong Q[a] \subseteq Q[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \overline{Q}$, где x_i – все корни многочлена f в $\overline{Q}$. Тогда $x_i \in \operatorname{Int}_{\overline{Q}} I = \sqrt{I \operatorname{Int}_{\overline{Q}} R}$ по лемме 5.4.2. Следовательно, корни многочлена p также лежат в этом множестве. По теореме Виетта коэффициенты c_i многочлена p лежат в $\sqrt{I \operatorname{Int}_{\overline{Q}} R} \cap Q$. Так как R целозамкнуто, то $c_i \in R$. Кроме того, они являются целыми над I. По лемме 5.4.2 с $A = R$ они принадлежат $\sqrt{I}$. □

5.5. Теорема о спуске

Пусть A – целое расширение кольца R, а $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Заметим, что $A_\mathfrak{q}$ не обязательно является целым над $R_{\mathfrak{q}\cap R}$. Например, пусть $R = F[t^2] \subseteq F[t] = A$, где F – поле, а $\mathfrak{q} = (t-1)A$. Тогда $\mathfrak{q} \cap R = (t^2-1)R$.

Упражнение 5.5.1. Докажите, что $\frac{1}{t+1}$ не является целым над $R_{\mathfrak{q}\cap R}$.

Теорема 5.5.2 (going down theorem)**.** *Предположим, что A – область целостности, а R целозамкнуто. Тогда каноническое отображение* $\operatorname{Spec} A_\mathfrak{q} \to \operatorname{Spec} R_{R\cap\mathfrak{q}}$ *сюръективно.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}$ и обозначим через λ гомоморфизм локализации $R \to R_\mathfrak{p}$. По следствию 2.2.6 отображения λ^* и λ_* являются взаимно обратными биекциями между $\operatorname{Spec} R_\mathfrak{p}$ и множеством простых идеалов R, содержащихся в $\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{r}$ – простой идеал кольца $R_\mathfrak{p}$, а $\mathfrak{p}' = \mathfrak{r} \cap R \leqslant \mathfrak{p}$ – соответствующий ему идеал в R.

Рассмотрим коммутативную диаграмму колец и соответствующую диаграмму спектров:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\iota} & A \\ {\scriptstyle\lambda_\mathfrak{p}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\lambda_\mathfrak{q}} \\ R_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\varphi} & A_\mathfrak{q} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} R & \xleftarrow{\iota^*} & \operatorname{Spec} A \\ {\scriptstyle\lambda_\mathfrak{p}^*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\lambda_\mathfrak{q}^*} \\ \operatorname{Spec} R_\mathfrak{p} & \xleftarrow{\varphi^*} & \operatorname{Spec} A_\mathfrak{q} \end{array}$$

По лемме 2.2.3 отображение $\lambda_\mathfrak{p}^*$ инъективно, поэтому $\mathfrak{r} \in \operatorname{Im}\varphi^* \iff \mathfrak{p}' \in \operatorname{Im}(\varphi\circ\lambda_\mathfrak{p})^*$. По лемме 2.2.2 это равносильно равенству $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'A_\mathfrak{q} \cap R$. Таким образом, достаточно показать, что $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'A_\mathfrak{q} \cap R$ для любого $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$.

Включение $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}'A_\mathfrak{q} \cap R$ очевидно. Обратно, пусть $x = \frac{y}{s} \in \mathfrak{p}'A_\mathfrak{q} \cap R$, где $y \in \mathfrak{p}'A$, а $s \in A \smallsetminus \mathfrak{q}$. По лемме 5.4.2 y является целым над идеалом $\mathfrak{p}'$. Обозначим через $f(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$ минимальный многочлен элемента y над полем частных Q кольца R. По лемме 5.4.3 $c_i \in \sqrt{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{p}'$. Подставляя $y = xs$ в многочлен f и деля на x^n получим

$$f(y) = 0 \iff g(s) := s^n + c_{n-1}x^{-1}s^{n-1} + \cdots + x^{-n}c_0 = 0.$$

Так как f – минимальный, то и g – минимальный многочлен элемента s над Q. Применяя лемму 5.4.3 с $I = R$ к элементу s, получаем $a_i := c_i x^{i-n} \in \sqrt{R} = R$. Кроме того, $a_i x^{n-i} = c_i \in \mathfrak{p}'$. Если $x \notin \mathfrak{p}'$, то $a_i \in \mathfrak{p}'$ при всех i, откуда $s^n \in \mathfrak{p}'A \subseteq \mathfrak{q}$, что противоречит выбору s. Значит $x \in \mathfrak{p}'$, что и требовалось доказать. □

Следствие 5.5.3. *В условиях теоремы пусть $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$, а $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} R$ – идеал, содержащийся в $\mathfrak{q}$. Тогда существует $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} A$, содержащийся в $\mathfrak{q}$, такой что $R \cap \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$.*

Доказательство. По теореме идеал $\mathfrak{p}'$ лежит в образе композиции $\lambda^* \circ \varphi^* = \iota^* \circ \lambda_\mathfrak{q}^*$. Образ $\lambda_\mathfrak{q}^*$ состоит из идеалов, содержащихся в $\mathfrak{q}$. Следовательно, существует $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$ в спектре A, который отображается в $\mathfrak{p}'$, а это и требовалось доказать. □

Глава 6

Конечнопорожденные алгебры над полем

В этой главе все кольца являются конечнопорожденными алгебрами над полем F.

6.1. Теорема Нетер о нормализации

Пусть $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $F[t] = F[t_1, \dots, t_n]$. Для $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ положим $t^m = \prod_{i=1}^{n} t_i^{m_i} \in F[t]$.

Лемма 6.1.1. *Пусть $f \in F[t]$. Существует автоморфизм φ кольца $F[t]$ такой, что*

$$\varphi(f) = at_n^\ell + g_{\ell-1}t_n^{\ell-1} + \dots + g_0, \text{ где } a \in F^\times, \ g_0, \dots, g_{\ell-1} \in F[t_1, \dots, t_{n-1}].$$

Если поле F бесконечно, то можно взять $\varphi(t_n) = t_n$, $\varphi(t_i) = t_i + c_i t_n$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ для некоторых $c_1, \dots, c_{n-1} \in F$.

Доказательство. Пусть $f = \sum_{m \in N} a_m t^m$, где $N \subseteq \mathbb{N}_0^n$ – некоторое конечное подмножество, а все a_m ненулевые. Положим $\varphi(t_n) = t_n$, $\varphi(t_i) = t_i + t_n^{k_i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$, а $k = (k_1, \dots, k_{n-1}, 1)$. Тогда $\varphi(t^m) = t_n^{km^T} + h_m$, где $\deg_{t_n} h_m < km^T$. Пусть $r > m_i$ при всех $m \in N$ и $i = 1, \dots, n$. Возьмем $k_i = r^{n-1}$. Тогда $m_1 m_2 \dots m_n$ является записью числа km^T в r-ичной системе счисления. Следовательно, при разных m эти числа различны, в частности, среди них есть ровно одно максимальное, скажем, ks^T при $s \in N$. Тогда $\varphi(f) = a_s t_n^{ks^T} + h$, где $\deg_{t_n} h < ks^T$.

Пусть теперь поле F бесконечно, $\varphi(t_n) = t_n$, а $\varphi(t_i) = t_i + c_i t_n$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. В этом случае $\varphi(t^m) = c_1^{m_1} \dots c_{n-1}^{m_{n-1}} t^d + h_m$, где $d = \deg t^m = m_1 + \dots + m_n$, а $\deg_{t_n} h_m < d$. Пусть $d = \deg f$. Коэффициент при старшей степени t_n^d в многочлене $\varphi(f)$ равен $\sum a_m c_1^{m_1} \dots c_{n-1}^{m_{n-1}}$, где сумма берется по всем $m \in N$ таким, что $m_1 + \dots + m_n = d$. Это ненулевой многочлен от переменных $c_1, \dots, c_{n-1}$. Так как поле бесконечно, то он имеет ненулевое значение. □

Теорема 6.1.2. *Пусть A – конечнопорожденная алгебра над полем F. Существует инъективный конечный гомоморфизм $F[t_1, \dots, t_d] \to A$.*

Доказательство. Любая конечнопоржденная алгебра A над полем F изоморфна фактор-алгебре $F[t_1, \dots, t_n]/I$ для некоторого идеала I. Проведем индукцию по n. При $n = 0$ (в этой теореме не исключается случай кольца многочленов от нуля переменных) наша алгебра равна F и доказывать нечего.

Пусть $n > 0$. Случай $I = 0$ очевиден. Если же $I \neq 0$, то, воспользовавшись леммой 6.1.1 и заменив I на $\varphi(I)$, можно считать, что I содержит многочлен f, унитальный по переменной t_n. Пусть $\bar{\cdot} : F[t_1, \dots, t_n] \to A$ – гомоморфизм редукции. Положим $R = \overline{F[t_1, \dots, t_{n-1}]}$, а $x = \overline{t_n}$. Ясно, что $R \cong F[t_1, \dots, t_{n-1}]/J$ для некоторого идеала J, а $A = R[x]$. Очевидно также, что $\bar{g}(x) = 0$, где g – это f, рассмотренный как многочлен от t_n с коэффициентами из $F[t_1, \dots, t_{n-1}]$. Так как g – унитальный многочлен, то x – целый над R и $A = R[x]$ является конечным расширением R. По индукционному предположению R является конечным расширением кольца многочленов. Наконец по лемме 5.1.2 исходная алгебра также является конечным расширением того же кольца многочленов, что и R. □

Позже мы докажем, что $\dim F[t_1, \dots, t_d] = d$. По следствию 5.2.5 число d из формулировки теоремы равно $\dim A$.

Геометрически теорема означает, что из любого многообразия существует конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство. Более того, если поле бесконечно, то это накрытие может быть задано линейными многочленами.

Следствие 6.1.3 (лемма Зариского)**.** *Кольцо $A/\mathfrak{m}$ является конечным расширением поля F для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \leqslant A$. В частности, если конечнопорожденная алгебра над F является полем, то это конечное расширение F.*

Доказательство. По лемме Нетер $A/\mathfrak{m}$ является конечным расширением кольца многочленов $F[t_1, \ldots, t_d]$, а так как $\mathfrak{m}$ – максимален, то $A/\mathfrak{m}$ – поле. По лемме 5.2.1 $F[t_1, \ldots, t_d]$ также является полем, т. е. $d = 0$. □

6.2. Теорема Гильберта о нулях

В следующей теореме собраны три равносильные формулировки слабой теоремы Гильберта о нулях.

Теорема 6.2.1 (Слабая теорема Гильберта о нулях)**.** *Пусть F – поле. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *F алгебраически замкнуто.*
(2) *$F[t_1, \ldots, t_n]/I \cong F$ для любого максимального идеала I кольца многочленов $F[t_1, \ldots, t_n]$.*
(3) *Любой максимальный идеал кольца $F[t_1, \ldots, t_n]$ порожден элементами $t_1-\alpha_1, \ldots, t_n-\alpha_n$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*
(4) *Набор многочленов $P \subseteq F[t_1, \ldots, t_n]$ не имеет общих корней тогда и только тогда, когда P порождает единичный идеал.*

Доказательство. Вспоминаем обозначение $T = (t_1, \ldots, t_n)$.

(1) $\implies$ (2). По теореме 6.1.3 $F[T]/I$ является конечным, а значит и целым расширением поля F. Но замкнутое поле не имеет нетривиальных целых расширений, потому что любой многочлен из $F[T]$ раскладывается на линейные множители уже в $F[T]$.

(2) $\implies$ (3). Пусть $\rho : F[T] \to F$ – гомоморфизм F-алгебр с ядром I. Положим $\alpha_i = \rho(t_i)$. Тогда $t_i - \alpha_i \in I$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, I содержит идеал M, порожденный всеми $t_i - \alpha_i$, который по предыдущей лемме является максимальным. Поэтому $I = M$.

(3) $\implies$ (4). Если P имеет общий корень $\alpha \in F^n$, то $\sum_{p\in P} f_p(\alpha)p(\alpha) = 0$ для любых $f_p \in F[t_1, \ldots, t_n]$. Поэтому равенство $\sum_{p\in P} f_p p = 1$ невозможно (эта часть доказательства не зависит от других условий).

Обратно, если P не порождает единичный идеал, то оно содержится в некотором максимальном идеале $I \leqslant F[t_1, \ldots, t_n]$. По пункту (3) многочлены из I имеют общий корень $\alpha \in F^n$, следовательно, и $p(\alpha) = 0$ для любого $p \in P$.

(4) $\implies$ (1). Если F не замкнуто, то существует многочлен $p \in F[t_1]$, не имеющий корней. Ясно, что этот многочлен не порождает единичный идеал в кольце $F[T]$. □

Наконец, докажем полную версию теоремы Гильберта о нулях, которая по другому называется Nullstellensatz. Для подмножества $P \subseteq F[T]$ обозначим через $V(P)$ множество общих нулей всех многочленов из P.

Теорема 6.2.2 (Теорема Гильберта о нулях)**.** *Пусть F – алгебраически замкнутое поле, $P \subseteq F[t_1, \ldots, t_n]$, а $f \in F[t_1, \ldots, t_n]$. Для того чтобы $f\big(V(P)\big) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы многочлен f^d принадлежал идеалу, порожденному P, для некоторого натурального d.*

Доказательство. Если f^d принадлежит идеалу, порожденному P, то $f^d\big(V(P)\big) = 0$, откуда $f\big(V(P)\big) = 0$. Обратную импликацию выведем из слабой теоремы о нулях при помощи *трюка Рабиновича.*

В кольце многочленов $F[t_0, \ldots, t_n]$ рассмотрим подмножество $P \cup \{1 + t_0 f\}$. Для $a \in F^n$, если $P(a) = 0$, то $1 + t_0 f(a) = 1$, поэтому $V(P \cup \{1 + t_0 f\}) = \varnothing$. По слабой теореме о нулях множество $P \cup \{1 + t_0 f\}$ порождает единичный идеал, т. е. существуют $g, g_1, \ldots, g_m \in F[t_0, \ldots, t_n]$ и $p_1, \ldots, p_m \in P$ такие, что

$$(1 + t_0 f)g + \sum_{k=1}^{m} g_k p_k = 1.$$

Существует единственный гомоморфизм $F[t_1, \ldots, t_n]$-алгебр из $F[t_0, \ldots, t_n]$ в главную локализацию $F[t_1, \ldots, t_n]_f$, посылающий t_0 в $-1/f$. Применяя его к выделенной формуле, получаем $\sum h_k p_k = 1$, где $h_k = g_k(-1/f, t_1, \ldots, t_n)$ – образ g_k при указанном гомоморфизме. Любой элемент локализации $F[t_1, \ldots, t_n]_f$ записывается в виде q/f^d для $q \in F[t_1, \ldots, t_n]$ и $d \in \mathbb{N}_0$. Записав все h_k в виде $h_k = q_k/f^d$ для $q_k \in F[t_1, \ldots, t_n]$ и достаточно большого d и домножив на знаменатель, получим $f^d = \sum q_k p_k$, что и требовалось. □

6.3. Радикал конечнопорожденной алгебры

Теорема 6.3.1. *Пусть A – конечнопорожденная алгебра над полем F, а $I \leqslant A$. Тогда пересечение всех максимальных идеалов, содержащих I, равно $\sqrt{I}$.*

Доказательство. Заменяя A/I на A можно считать, что $I = 0$. Пусть $r \in \operatorname{Rad} A$. Если r не нильпотентен, то $A_r \cong A[t]/(rt - 1) \neq 0$ и конечно порождена. Пусть $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A_r$, а $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ – его прообраз под действием гомоморфизма локализации. Тогда $F \hookrightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A_r/\mathfrak{m}$. По лемме Зариского $A_r/\mathfrak{m}$ – конечное расширение F, а значит конечно над $A/\mathfrak{p}$. По лемме 5.2.1 $A/\mathfrak{p}$ – поле, т. е. $\mathfrak{p}$ – максимальный идеал. Так как $r \in \operatorname{Rad} A$, то $r \in \mathfrak{p}$. Следовательно, $\lambda(r) \in \lambda(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{m}$, где λ – гомоморфизм локализации. Но r обратим в A_r, поэтому он не может лежать в собственном идеале этого кольца. Противоречие показывает, что r нильпотентен, т. е. $r \in \operatorname{NRad} A$. □

6.4. Степень трансцендентности

Пусть K/F – расширение полей. Цель настоящего параграфа – определить степень трансцендентности K/F как мощность базиса трансцендентности, в частности, показать, что мощность любых двух базисов трансцентдентности одинакова.

Для подмножества $X \subseteq K$ определим $\langle X \rangle$ как целое замыкание в K подполя $F(X)$, т. е. наименьшего подполя в K, содержащего F и X.

Множества X называется алгебраически независимым, если естественное отображение кольца многочленов $F[X]$ в K инъективно. Ясно, что это равносильно следующему утверждению: любой элемент $x \in X$ не содержится в $\langle X \smallsetminus \{x\} \rangle$.

Алгебраически независимое подмножество X называется базисом трансцендентности K над F, если $\langle X \rangle = K$.

Лемма 6.4.1. *Пусть $X, Y \subseteq K$.*

(1) *Если $X \subseteq Y$, то $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.*
(2) *Если $x \in \langle X \rangle$, то существует конечное подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $x \in \langle X' \rangle$.*
(3) $X \subseteq \langle X \rangle$.
(4) $\langle \langle X \rangle \rangle \subseteq \langle X \rangle$.
(5) *Если $y \in \langle X \cup \{z\} \rangle \smallsetminus \langle X \rangle$, то $z \in \langle X \cup \{y\} \rangle$ (свойство замены).*

Лемма 6.4.2. *Пусть $X \subseteq K$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *X – базис трансцендентности K над F.*
(2) *X максимальное алгебраически независимое подмножество.*
(3) *X минимальное подмножество, обладающее свойством $\langle X \rangle = K$.*

Следствие 6.4.3. *Для любого расширения полей базис трансцендентности существует.*

Более того, если $Y \subseteq Z$, Y алгебраически независимо, а $\langle Z \rangle = K$, то существует базис трансцендентности X, лежащий между Y и Z.

Теорема 6.4.4. *Любые 2 базиса трансцендентности данного расширения имеют одинаковую мощность.*

Доказательство. Пусть X и B – базисы трансцендентности раширения K/F. Предположим сначала, что $|X| = n < \infty$ и $|X| \leqslant |B|$. Зафиксируем $b_1 \in B$. Так как $\langle B \smallsetminus \{b_1\} \rangle \neq K$, то существует $x_1 \in X$ такой, что $x_1 \in \langle B \rangle \smallsetminus \langle B \smallsetminus \{b_1\} \rangle$. По свойству замены $b_1 \in \langle B \smallsetminus \{b_1\} \cup \{x_1\} \rangle$, откуда $\langle B_2 \rangle = K$, где $B_2 = B \smallsetminus \{b_1\} \cup \{x_1\}$. Если B_2 не является алгебраически независимым, то существует многочлен от элементов B_2 с коэффициентами из F, равный 0. Так как $B \smallsetminus \{b_1\}$ независимо, то этот многочлен должен нетривиально зависеть от x_1, т. е. $x_1 \in \langle B \smallsetminus \{b_1\} \rangle$, что не так. Следовательно, B_2 базис трансцендентности.

По индукции построим базис трансцендентности $B_k = B \smallsetminus \{b_1, \ldots, b_k\} \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$. Предположим, что B_{k-1} построен. Можно считать, что $B_{k-1} \cap X = \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ все совпадающие элементы можно с самого начала заменить друг на друга). Выберем $b_k \in B \smallsetminus \{b_1, \ldots, b_{k-1}\} = B_{k-1} \smallsetminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Если $x_k \notin \langle B_{k-1} \smallsetminus \{b_k\} \rangle$, то $x_k \neq x_i$ при $i < k$, и аргументы, приведенные выше, показывают, что $B_k = B_{k-1} \smallsetminus \{b_k\} \cup \{x_k\}$ – базис трансцендентности.

При $k = n$ получим $B_n \supseteq X$, следовательно, $B_n = X$, в то время как $|B_n| = |B|$.

Пусть теперь X и B имеют бесконечные мощности. Для каждого элемента $x \in X$ существует конечный набор $B_x \subseteq B$ такой, что $x \in \langle B_x \rangle$. Таким образом, получаем функцию $\varphi : X \to 2^B_{fin}$, $\varphi(x) = B_x$, где 2^B_{fin} обозначает множество всех конечных подмножеств множества B. Из теории множеств известно, что $2^B_{fin} = |B|$.

С другой стороны, в каждом подполе $\langle B_x \rangle$ может быть не более $|B_x|$ алгебраически независимых элементов. Поэтому $\varphi^{-1}(B_x)$ конечно для любого X. В результате $|X| \leqslant |\operatorname{Im} \varphi \times \mathbb{N}| \leqslant |B \times \mathbb{N}| = |B|$. Аналогично, $|B| \leqslant |X|$, откуда по теореме Кантора–Бернштейна $|X| = |B|$. ☐

6.5. Размерность конечнопорожденной алгебры

Для области целостности R обозначим через $Q(R)$ ее поле частных.

Теорема 6.5.1. *Пусть R – конечнопорожденная алгебра над полем F. Если R – область целостности, то* $\dim R = \operatorname{tr.deg}_F Q(R)$.

Следствие 6.5.2. *Пусть $R \subseteq A$ – конечнопорожденные алгебры над полем F, являющиеся областями целостности. Тогда* $\dim A = \dim R + \dim A \otimes_R Q(R)$.

Глава 7

Примарное разложение

В этой главе мы возвращаемся к изучению произвольных коммутативных колец.

7.1. Примарный идеал

Лемма 7.1.1. *Пусть I – идеал в R. Следующие условия эквивалентны.*
(1) $ab \in I \iff (a \in I \vee b \in \sqrt{I})$.
(2) $ab \in I \iff (a \in I \vee b \in I \vee a, b \in \sqrt{I})$.
(3) *Все делители нуля в R/I нильпотентны.*

Если выполнены условия леммы, то идеал называется примарным. С первого взгляда кажется, что примарный – это просто тот идеал, радикал которого прост, но это не так. Например, нулевой идеал является примарным, если все делители нуля нильпотентны. Утверждение же о том, что нильпотентный радикал является простым идеалом означает, что если $ab = 0$, то *один из них* нильпотентен. В частности, в кольце $R = F[x, y]/(x^2, xy)$ нулевой идеал не является примарным, в то время как нильпотентный радикал равен xR является простым.

Вот чуть более геометрический пример.

Пример. $R = F[x, y, z]/(xy - z^2)$, $\mathfrak{p} = xR + zR$, $I = \mathfrak{p}^2$ не примарный, потому что $xy = z^2 \in I$, но $x \notin I \,\&\, y \notin \sqrt{I} = \mathfrak{p}$.

Лемма 7.1.2. *Если I примарный, то $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ – простой идеал. (В этом случае I называется $\mathfrak{p}$-примарным.)*
Если $\sqrt{I}$ – максимальный, то I – примарный.

Определение 7.1.3. Примарное разложение идеала I – это представление его в виде пересечения конечного числа примарных. Если такое разложение существует, то I называется разложимым.

Примарное разложение называется минимальным, если ни один из примарных идеалов не содержит пересечение остальных, а все простые, соответствующие входящим в разложение примарным, различны.

Лемма 7.1.4. *Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал. Конечное пересечение $\mathfrak{p}$-примарных идеалов является $\mathfrak{p}$-примарным идеалом.*

7.2. Ассоциированные простые

Если I – идеал в R, а $x \in R$, то

$$(I : x) := \{r \in R \mid rx \in I\} \text{ – идеал в } R$$

Лемма 7.2.1. *Пусть I – $\mathfrak{p}$-примарный. Если $x \in I$, то $(I : x) = R$, иначе $(I : x)$ является $\mathfrak{p}$-примарным. Если $x \notin \mathfrak{p}$, то $(I : x) = I$.*

Определение 7.2.2. $\operatorname{Ass}(I) := \operatorname{Spec} R \cap \{\sqrt{(I : x)} \mid x \in R\}$ называется множеством простых, ассоциированных с I.

Теорема 7.2.3. *Если $I = \bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k$ – минимальное примарное разложение I, то $\operatorname{Ass}(I) = \{\sqrt{I_k} \mid k = 1, \dots, n\}$. Это множество содержит все минимальные простые идеалы, содержащие I.*

Пример. Неоднозначность примарного разложения ($\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$).

7.3. Примарные идеалы и локализация

Пусть I – идеал кольца R, S – мультипликативное подмножество R, а $\lambda : R \to S^{-1}R$ – гомоморфизм локализации.

Лемма 7.3.1. *Отображения λ^* и λ_* являются взаимно обратными биекциями множества примарных идеалов кольца $S^{-1}R$ на множество примарных идеалов кольца R, не пересекающихся с S. Эти отображения сохраняют радикалы примарных идеалов.*

Если $I \cap S \neq \varnothing$, то $\lambda_*(I) = S^{-1}R$.

Следствие 7.3.2. *Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, причем $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Тогда $\lambda^* : \operatorname{Ideals} S^{-1}R \to \operatorname{Ideals} R$ индуцирует биекцию между $\lambda_*(\mathfrak{p})$-примарными идеалами и $\mathfrak{p}$-примарными идеалами.*

Лемма 7.3.3. *Пусть $I = \bigcap\limits_{k=1}^{n} I_k$ – минимальное примарное разложение I. Предположим, что $(\sqrt{I_k} \cap S = \varnothing \iff k \leqslant m)$. Тогда*

$$\lambda_*(I) = \bigcap_{k=1}^{m} \lambda_*(I_k) \text{ и } \lambda^*\big(\lambda_*(I)\big) = \bigcap_{k=1}^{m} I_k$$

являются минимальными примарными разложениями.

7.4. Изолированные подмножества

Подмножество в $\operatorname{Ass}(I)$ называется изолированным, если вместе с любым своим элементом оно содержит все меньшие его (по отношению к включению).

Теорема 7.4.1. *Пусть $I = \bigcap\limits_{k=1}^{m} I_k$ – минимальное примарное разложение идеала I, а Σ – изолированное подмножество $\operatorname{Ass}(I)$. Тогда идеал $I_\Sigma = \bigcap\limits_{\sqrt{I_k} \in \Sigma} I_k$ не зависит от разложения.*

В частности, это верно, когда $\Sigma = \{\mathfrak{p}\}$, где $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий I.

7.5. Неприводимые примарные идеалы в нетеровых кольцах

Определение 7.5.1. Идеал I неприводим, если $I_1 \cap I_2 = I$ влечет $I_1 = I$ или $I_2 = I$.

Заметим, что идеал $p^n\mathbb{Z}$ неприводим в $\mathbb{Z}$, хотя число p^n приводимо.

Лемма 7.5.2. *Если R нетерово, то любой неприводимый идеал является примарным.*

Доказательство. Пусть I неприводим и $xy \in I$. Рассмотрим цепочку $(I : x) \subseteq (I : x^2) \subseteq \dots \subseteq (I : x^n) = (I : x^{n+1}) = \dots$, которая обрывается за счет нетеровости. Покажем, что $((y)+I) \cap ((x^n)+I) = I$. Пусть $yz + i_1 = rx^n + i_2$. Тогда $rx^{n+1} = x(yz + i_1 - i_2) \in I$, откуда $r \in (I : x^{n+1}) = (I : x^n)$. А это значит, что $rx^n \in I$.

Так как I неприводим, то $y \in I$ или $x^n \in I$, что и означает, что I – примарный. $\square$

Лемма 7.5.3. *Пусть I – $\mathfrak{p}$-примарный идеал нетерова кольца R. Тогда $\mathfrak{p}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{p}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 7.5.4. *Пусть I – идеал нетерова кольца R, а $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *I является $\mathfrak{m}$-примарным.*
(2) $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$.
(3) *$\mathfrak{m}^n \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

7.6. Примарное разложение в нетеровых кольцах

Лемма 7.6.1. *Любой собственный идеал нетерова кольца равен пересечению конечного числа неприводимых.*

Теорема 7.6.2. *Любой собственный идеал нетерова кольца разложим, т. е. имеет примарное разложение.*

Глава 8

Дедекиндовы кольца

8.1. Кольца нормирования

F – поле, $R \subseteq F$. R – кольцо нормирования, если $F^\times \subseteq R \cup R^{-1}$.

В этом случае $F = Q(R)$.

Пусть Γ – линейно упорядоченная, аддитивная абелева группа. Гомоморфизм $v : F^\times \to \Gamma$ называется нормированием, если $v(x+y) \geqslant \min\bigl(v(x), v(y)\bigr)$.

Теорема 8.1.1. *Если v – нормирование, то $R = \{x \in F \mid v(x) \geqslant 0\}$ – кольцо нормирования.*

Обратно, пусть R – кольцо нормирования в F. Положим $\Gamma = F^\times/R^\times$ и $aR^\times \geqslant bR^\times \iff ab^{-1} \in R$. Тогда проекция $F^\times \to \Gamma$ является нормированием.

Указанные функции из множества сюръективных нормирований в множество колец нормирования и обратно являются взаимно обратными биекциями.

Предложение 8.1.2. *Пусть R – кольцо нормирования в поле F, соответствующее нормированию v. Тогда R – целозамкнутое локальное кольцо с максимальным идеалом $\{x \in R \mid v(x) > 0\}$.*

8.2. Кольца дискретного нормирования

Нормирование $v : F \to \Gamma$ называется дискретным, если $\Gamma = \mathbb{Z}$, а v сюръективно.

Кольцо дискретного нормирования (DVR) – это кольцо, соответствующее дискретному нормированию.

Предложение 8.2.1. *Пусть R – DVR в F, соответствующее дискретному нормированию v, $\pi \in R$, а $v(\pi) = 1$. Тогда*

(1) $R \setminus \{0\} = R^\times \times \langle\pi\rangle$ *(прямое произведение моноидов);*
(2) $\operatorname{Ideals} R = \{\pi^k R \mid k > 0\} \cup \{R, 0\}$*;*
(3) $\operatorname{Specm} R = \{\pi R\}$*;*
(4) $\operatorname{Spec} R = \{\pi R, 0\}$.

Примеры:

- $R = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{Q}$, $v = v_p$, где p – простое число, $\pi = p$.
- $R = K[[t]]$, $F = K((t))$, $v = \operatorname{ord}$, $\pi = t$.
- $R = \mathbb{Z}_p$, $F = \mathbb{Q}_p$, где p – простое число, $\pi = p$.

Лемма 8.2.2. *R – нетерова область целостности, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$. Тогда*

$$\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} \cong (\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^k/(\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^{k+1} \neq 0.$$

Теорема 8.2.3. *Пусть R – область целостности. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *R является DVR.*
(2) *R – локальное целозамкнутое нетерово кольцо размерности* 1.
(3) *R – локальное нетерово кольцо, не являющееся полем, у которого максимальный идеал – главный.*
(4) *R – факториальное кольцо с единственным неприводимым элементом (с точностью до ассоциированности).*
(5) *R – локально, не поле, и* $\operatorname{Ideals} R = \{R, 0, \mathfrak{m}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. (2) $\implies$ (3). По лемме $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Возьмем $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$.

Любой идеал в R имеет примарное разложение, а так как простых идеалов всего 2, то является $\mathfrak{m}$-примарным.

Возмем минимальное k такое, что $\mathfrak{m}^k \subseteq aR \subseteq \mathfrak{m}$.

Существует $b \in \mathfrak{m}^{k-1} \setminus aR$. Тогда $\frac{b}{a}\mathfrak{m} \subseteq \frac{\mathfrak{m}^k}{a} \subseteq R$.

Если $\frac{b}{a}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, то по теореме Гамильтона–Кэли $\frac{b}{a}$ целый над R. Так как R целозамкнуто, то $\frac{b}{a} \in R$ – противоречие.

Следовательно, $\frac{b}{a}\mathfrak{m} = R$, значит $b\mathfrak{m} = aR$. Если бы b лежало в $\mathfrak{m}$, то $a \in \mathfrak{m}^2$ – противоречие. Таким образом, b обратимо в R и $aR = \mathfrak{m}$.

(1) $\implies$ (2) уже доказано, (5) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (1) $\implies$ (5) – несложно. □

8.3. Дедекиндовы кольца

Теорема 8.3.1. *Пусть R – нетерова область целостности размерности 1. Следующие условия эквивалентны.*

1. *R целозамкнуто.*
2. *Любой примарный идеал имеет вид $\mathfrak{m}^k$ для некоторого $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$ и $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольцо $R_\mathfrak{m}$ является кольцом дискретного нормирования.*

Доказательство. (1) $\iff$ (3) так как целозамкнутость локальное свойство, а по пункту 2 теоремы 8.2.3 $R_\mathfrak{m}$ является кольцом дискретного нормирования тогда и только тогда, когда оно целозамкнуто (очевидно, что оно локальное нетерово размерности 1).

(2) $\iff$ (3) так как есть биекция между $\mathfrak{m}$-примарными идеалами R и $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$-примарными идеалами $R_\mathfrak{m}$, а все идеалы в DVR мы знаем. □

Кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы, называется дедекиндовым.

Предложение 8.3.2. *В дедекиндовом кольце любой идеал раскладывается в произведение $I = \prod \mathfrak{m}_i^{k_i}$, где $\mathfrak{m}_i$ – различные максимальные идеалы.*

8.4. Кольцо целых в поле алгебраических чисел

Пусть Z – дедекиндово кольцо с полем частных Q, например $Z = \mathbb{Z}$ или $Z = K[t]$, где K – поле. Пусть F – конечное расширение Q, а $R = \operatorname{Int}_F Z$. В случае $Z = \mathbb{Z}$ поле F называется полем алгебраических чисел, а R – кольцом целых этого поля.

Лемма 8.4.1. *Любой элемент поля F можно записать в виде r/m, где $r \in R$, а $m \in Z$. Поле частных кольца R равно F. Следовательно, R – целозамкнуто.*

Теорема 8.4.2. *Кольцо R является дедекиндовым. В частности, кольцо целых поля алгебраических чисел дедекиндово.*

Доказательство. R – целозамкнутая область размерности 1 (размерность не меняется при целом расширении). Надо доказать, что она нетерова. Докажем, что R – содержится в конечнопорожденном Z-модуле, и, следовательно, является конечным расширением Z. Проведем доказательство только для сепарабельного расширения F/Q.

$m : F \to \operatorname{End}_{Q-mod}(F)$, $x \mapsto m_x$ – умножение на x.

$B : F \times F \to Q$, $B(x,y) = \operatorname{Tr} m_{xy}$ – невырожденная билинейная форма на Q-модуле F (равносильно условию сепарабельности).

$u = (u_1, \dots, u_n)$ – базис F над Q, по лемме можно выбрать $u_i \in R$.

$v = (v_1, \dots, v_n)$ – двойственный базис. Тогда

$$x = \sum B(x, u_i) v_i.$$

Докажем, что $B(x, u_i) \in Z$ при всех i и всех $x \in R$. Так как $B(x, u_i) \in Q$, а Z целозамкнуто в Q, то достаточно доказать, что $B(x, u_i)$ целые над Z. Положим $z = xu_i \in R$. Минимальный многочлен f эндоморфизма m_z над Q равен минимальному многочлену z над Q, который по лемме 5.4.3 является унитальным с коэффициентами из Z. Поэтому корни f – целые над Z. Все собственные числа линейного оператора являются корнями минимального многочлена, таким образом, собственные числа m_z являются целыми над $\mathbb{Z}$. Осталось вспомнить, что след оператора равен сумме собственных чисел с учетом кратности, а целое замыкание является подкольцом.

Таким образом, $R \subseteq \sum Zv_i$. □

Глава 9

Теорема Крулля о высоте

9.1. Hauptidealsatz

Теорема 9.1.1. *Пусть I – главный идеал нетерова кольца R. Тогда высота любого минимального простого идеала, содержащего I, не превосходит* 1.

Доказательство. Пусть $I = xR$, а $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий x. Заменяя R на $R_\mathfrak{p}$ можно считать, что R – локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Тогда любой собственный идеал R содержится в $\mathfrak{p}$. При этом $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий Rx, поэтому он единственный такой. Следовательно, $\sqrt{xR} = \mathfrak{p}$. Кольцо R/Rx является нетеровым и имеет размерность 0. По теореме 4.5.1 оно является артиновым.

Пусть $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ – простой идеал, а $\lambda : R \to R_\mathfrak{q}$ – гомоморфизм локализации. Положим $\mathfrak{q}^{(n)} = \lambda^*(\lambda_*(\mathfrak{q}^n))$. Это идеал называется n-й символической степенью $\mathfrak{q}$. В отличие от $\mathfrak{q}^n$ этот идеал обязательно является $\mathfrak{q}$-примарным. Действительно, $\sqrt{\lambda_*(\mathfrak{q}^n)} = \lambda_*(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Max} R_\mathfrak{q}$, поэтому $\lambda_*(\mathfrak{q}^n)$ является $\lambda_*(\mathfrak{q})$-примарным, а λ^* сохраняет примарность, см. лемму 7.3.1.

Рассмотрим убывающую цепочку идеалов

$$(\mathfrak{q} + Rx)/Rx \supseteq (\mathfrak{q}^{(2)} + Rx)/Rx \supseteq \dots \supseteq (q^{(n)} + Rx)/Rx \supseteq \dots$$

кольца R/Rx. Так как это кольцо артиново, то эта цепчка обрывается, т. е. $(\mathfrak{q}^{(n)} + Rx)/Rx = (\mathfrak{q}^{(n+1)} + Rx)/Rx$ для всех достаточно больших n. Другими словами, $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n+1)} + Rx$. Любой $y \in \mathfrak{q}^{(n)}$ представляется в виде $y = z + ax$ для некоторых $z \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ и $a \in R$. Тогда $ax \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Так как $\mathfrak{p}$ – минимальный простой, содержащий x, то $x \notin \mathfrak{q}$. Так как $\mathfrak{q}^{(n)}$ – примарный идеал, то $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Следовательно, $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + x\mathfrak{q}^{(n)}$.

В факторе по $\mathfrak{q}^{(n+1)}$ получим $\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)} = x\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)}$. Так как $x \in \mathrm{RadR}$, то по лемме Накаямы отсюда следует равенство $q^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)} = 0$ (так как R нетерово, то все идеалы конечно порождены). Отображение λ^* инъективно, поэтому $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} R_\mathfrak{q}$. Еще раз используя лемму Накаямы получим $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = 0$. Следовательно, идеал $\mathfrak{q}$ имеет высоту 0.

Любой простой, строго содержащийся в $\mathfrak{p}$ имеет высоту 0, следовательно, $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$ (если таких простых не существует, то $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 0$). □

Глава 10

Пополнения

10.1. Определение пополнения, точные последовательности

$A_0 = A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ – убывающая система подгрупп абелевой группы A.
Топология, определяемая этой фильтрацией. Хаусдорфовость.
Ограниченная разность фильтраций. Совпадение топологий.
$\hat{A} := \operatorname{proj}\lim A/A_n$.
Лемма о змее (упомянуть).
Точность пополнения. Полнота пополнения.
I-адическая топология на R-модуле M.
I-фильтрация на M, стабильная I-фильтрация.
Градуированное кольцо, градуированный модуль над градуированным кольцом, морфизмы.

Теорема 10.1.1. *Градуированное кольцо $R = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} R_n$ нетерово $\iff$ R_0 нетерово и R – конечнопорожденная R_0-алгебра.*

Определение раздутия алгебры в идеале $\mathrm{Bl}_I(R)$, ее нетеровость.
Определение раздутия модуля по отношению к I-фильтрации. Стабильные I-фильтрации.
Ограниченность разности любых двух стабильных I-фильтраций.

Лемма 10.1.2. *R – нетерово. Пусть (M_n) – I-фильтрация к. п. модуля M. $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} M_n$ конечнопорождено над $\mathrm{Bl}_I(R)$ $\iff$ (M_n) стабильна.*

Лемма 10.1.3 (лемма Артина–Риса)**.** *R – нетерово кольцо, $M' \leqslant M$ – конечнопорожденные модули, (M_n) – стабильная I-фильтрация модуля M. Тогда $(M' \cap M_n)$ – стабильная I-фильтрация модуля M'.*

Теорема 10.1.4. *R – нетерово кольцо. M – конечнопорожденный R-модуль. Тогда пополнение M по отношению к I-стабильной фильтрации изоморфно $M \otimes_R \hat{R}_I$.*

Доказательство. Для свободного очевидно. Далее из точной последовательности $0 \to N \to R^m \to M \to 0$ получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & N \otimes_R \hat{R}_I \arrow[r] \arrow[d] & R^m \otimes_R \hat{R}_I \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R \hat{R}_I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{N} \arrow[r] & \widehat{R^m} \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Первая строка точна, потому что тензорное произведение точно справа, вторая строка – из точности пополнения. Центральная вертикальная стрелка – изоморфизм, поэтому правая вертикальная – эпиморфизм. Следовательно, левая тоже эпиморфизм (N также как и M конечнопорожден, так как кольцо нетерово). Значит правая изоморфизм (например, по лемме о змее). □